

Differentialgleichung
Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 20.05.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Mittwoch, 20.05.2015, 8:30-10:00 Uhr und 10:15-11:45 Uhr, E45

Aufgabe 13 (4+4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden DGL:

(a) $u'' - 4u = t^2 - 4t - \frac{1}{2}$,

(b) $u''' - u'' - u' + u = 4t e^t$.

Aufgabe 14 (2+2+2 Punkte)

Es seien I ein offenes Intervall, $f, g, h \in C(I)$. Betrachten Sie die nichtlineare DGL:

$$v' = f v^2 + g v + h. \quad (\#)$$

- (a) Zeigen Sie, sofern $u \in C^1(I)$ eine Lösung von $(\#)$ mit Anfangswert $(t_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}$ ist und y eine Lösung des bernoullischen AWP

$$y' = (2u f + g) y + f y^2, \quad y(t_0) = y_0 \quad (*)$$

ist, dass $v(t) := y(t) + u(t)$ eine Lösung von $(\#)$ mit $v(t_0) = y_0 + u_0$ definiert.

- (b) Entwickeln Sie einen Lösungsalgorithmus, um zu einer gegebenen Lösung u von $(\#)$ mit $u(t_0) = u_0$ eine Lösung von $(\#)$ mit $v(t_0) = v_0 \neq u_0$ zu bestimmen.
- (c) Lösen Sie das folgende AWP:

$$v' = 1 - v^2, \quad v(0) = 0.$$

Aufgabe 15 (3 Punkte)

Auf einen fallenden Körper mit Masse m wirkt in der Atmosphäre eine Reibungskraft. Bei geringen Geschwindigkeiten ist die Luftreibung proportional zur Geschwindigkeit des Körpers. Der Proportionalitätsfaktor $\rho > 0$ hängt i. A. von der Dichte des umgebenden Stoffes (Luft) und der Form des Körpers ab. Da die Reibung der Schwerkraft entgegenwirkt lautet die Bewegungsgleichung:

$$u''(t) = \frac{\rho}{m} u'(t) - g.$$

Lösen Sie das zugehörige AWP mit Anfangswerten $u(0) = 0$, $u'(0) = v_0 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 16 (3 Punkte)

Finden Sie eine Lösung der DGL $f^{(n)} - f = n \cdot \exp$ für $n \in \mathbb{N}$ mittels einmaliger Anwendung von 1.3, also ohne die Ergebnisse aus 1.8 oder 1.10 zu benutzen.

Hinweis: Wie können Sie das Problem auf $f' - f = \exp$ reduzieren?.