J. Wengenroth
T. Schlierkamp

SS 2015
21.04.2015

Differentialgleichung
Übungsblatt 2

Abgabe: Mittwoch, 29.04.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Mittwoch, 29.04.2015, 8:30-10:00 Uhr und 10:15-11:45 Uhr, E45

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme (AWP) und bestimmen Sie die maximalen Lösungsintervalle.

(a) $u'(t) + \operatorname{cotan}(t)u(t) = \frac{2t}{\sin(t)}$ mit $u(\frac{\pi}{2}) = 0$,

(b) $e^{u(t)}u'(t) = \cos(t)$ mit $u(0) = 0$.

Aufgabe 6 (3+3 Punkte)

(a) Seien $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ stetig und $t_0, u_0 > 0$.
Zeigen Sie, dass $u :]0,\infty[\to]0,\infty[$ genau dann das AWP

$$u' = g\left(\frac{u}{t}\right), \quad u(t_0) = u_0 \qquad (*)$$

löst, wenn die Funktion $v(t) = \frac{u(t)}{t}$ folgendes AWP löst:

$$v' = \frac{g(v) - v}{t}, \quad v(t_0) = \frac{u_0}{t_0}. \qquad (**)$$

(b) Lösen Sie die DGL $\frac{u'}{t} - \frac{u}{t^2} = 0$ auf drei verschiedene Arten.

Aufgabe 7 (3 Punkte)
Eine Funktion $u :]0,\infty[\to]0,\infty[$ löst offenbar genau dann die DGL $u' = t \cdot u$, wenn sie auch eine der folgenden äquivalenten Gleichungen erfüllt:

$$\text{(a)} \quad u' - t \cdot u = 0, \qquad \text{(b)} \quad \frac{u'}{u} - t = 0,$$
$$\text{(c)} \quad \frac{u'}{t} - u = 0, \qquad \text{(d)} \quad \frac{u'}{t \cdot u} - 1 = 0.$$

Überprüfen Sie die Gleichungen auf Exaktheit und lösen Sie diese im Falle der Exaktheit.

Aufgabe 8 (5 Punkte)
Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(t,u) = \frac{u}{t^2 + u^2}\ , \qquad g(t,u) = -\frac{t}{t^2 + u^2}.$$

Zeigen Sie, dass (f, g) keine Stammfunktion F besitzt, obwohl die Integrabilitätsbedingung $D_2 f = D_1 g$ erfüllt ist. Wieso ist dies kein Widerspruch zu 1.7 (c)?
Hinweis:
Betrachten Sie $\varphi(t) = F(\cos(t), \sin(t))$, so dass φ periodisch ist.
Warum kann dies aber nicht sein?