

**Differentialgleichung**  
**Übungsblatt 10**

Abgabe: Mittwoch, 08.07.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5  
Übungen: Mittwoch, 08.07.2015, 8:30-10:00 Uhr und 10:15-11:45 Uhr, E45

---

**Aufgabe 37 (5 Punkte)**

Es sei  $H_n^- := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1, x_{n+1} \leq 0\}$ .

Skizzieren Sie  $H_n^-$  für  $n = 1$  in  $\mathbb{R}^2$  sowie für  $n = 2$  in  $\mathbb{R}^3$ .

Zeigen Sie, dass  $H_n^-$  eine  $n$ -dim. Mfk. ist und bestimmen Sie den Rand  $\partial H_n^-$ .

Zeichnen Sie den Rand ebenfalls in Ihrer Skizze ein.

**Aufgabe 38 (3 Punkte)**

Skizzieren Sie die Mengen

$$\bar{\mathbb{D}} := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\} \text{ und } \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D} := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \geq 1\}$$

jeweils in  $[-2, 2]^2$  und bestimmen Sie in beiden Fällen (graphisch) den Durchlaufsinne des Einheitskreises (bzgl. der Standardorientierung  $\text{or}(e_1, e_2)$ ).

**Aufgabe 39 (5 Punkte)**

Seien  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  eine  $n$ -dim. randlose  $C^k$ -Mfk. und  $x \in M$ . Zeigen Sie, dass für

$$\mathcal{M}_x := \{\varphi'(0) \in \mathbb{R}^m : \exists \varepsilon > 0, \varphi \in C^1(]-\varepsilon, \varepsilon[, M) \text{ mit } \varphi(0) = x\}$$

die Gleichheit  $T_x M = \mathcal{M}_x$  gilt.

Geben Sie eine Vermutung an, wie die Menge  $\mathcal{M}_x$  aussehen müsste, damit die Gleichheit für einen Randpunkt  $x \in \partial M$  im Falle einer berandeten Mfk.  $M$  gilt.

**Hinweis:** „ $\supseteq$ “ Stellen Sie  $\varphi'(0)$  als LK von Basisvektoren von  $T_x M$  dar.

**Aufgabe 40 (7 Punkte)**

Lösen Sie folgende AWP's und geben Sie maximale Lösungsintervalle an:

(a)  $u' = t\sqrt{u}, \quad u(1) = 1;$

(b)  $u' = -2tu + e^{t^2}u^2, \quad u(0) = u_0 \in \{-1, 1\};$

(c)  $u' = \frac{t \exp(u/t) + u}{t}, \quad u(1) = -1.$