

Differentialgleichung
Übungsblatt 1

Abgabe: Mittwoch, 22.04.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Mittwoch, 22.04.2015, 8:30-10:00 Uhr und 10:15-11:45 Uhr, E45

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme (AWP) und bestimmen Sie die maximalen Lösungsintervalle.

(a) $u'(t) = \frac{t \cdot u(t) + \sqrt{t^2 + 1}}{t^2 + 1}$ mit $u(0) = 1$,

(b) $u'(t) = -\frac{t}{u^2(t)}$ mit $u(0) = 1$.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte) (Bernoullische-DGL)

- (a) Seien $I =]a, b[$ ein offenes Intervall, $g, h \in C(I)$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
Betrachten Sie für $(t_0, y_0) \in I \times]0, \infty[$ das (nichtlineare) AWP

$$y' = gy + hy^\alpha, \quad y(t_0) = y_0. \quad (*)$$

Zeigen Sie, dass y genau dann eine Lösung von $(*)$ ist, wenn $z = y^{1-\alpha}$ eine Lösung des folgenden (linearen) AWP ist:

$$z' = (1 - \alpha)gz + (1 - \alpha)h, \quad z(t_0) = y_0^{1-\alpha}. \quad (**)$$

- (b) Lösen Sie für festes $c > 1$ das folgende AWP auf \mathbb{R} mithilfe von (a):

$$y' = y(c - y), \quad y(0) = 1$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und erfülle $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + f'(x) = 0$. Zeigen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Hinweis:

Betrachten Sie dazu die DGL $f' = -f + g$ mit geeigneten Anfangswerten.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachten Sie Beispiel 1.1 (f) mit einer Modifikation. Die Geschwindigkeit soll nicht mehr konstant, sondern proportional zum Abstand zur Nachbarin sein, also

$$v'_j = \alpha(v_{j+1} - v_j), \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (v_5 = v_1) \text{ mit } \alpha > 0.$$

Lösen Sie dieses System mit den gleichen Anfangsbedingungen ($v_j(0) = i^{j-1}$) und unter den gleichen Plausibilitätsbedingungen wie in 1.1 (f). Vergleichen Sie außerdem die Flugbahn $\{v_1(t) : t \in [0, \infty[$ mit der entsprechenden Flugbahn von u_1 aus 1.1 (f).