

J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2011
07.07.2011

Differentialgleichungen und Integralsätze Übungsblatt 11

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:

Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Dienstag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 12.07.2011 um 12:25 im E51 statt.

T 1

Seien $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine (randlose) n -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit und $L \subseteq \mathbb{R}^\ell$ eine berandete j -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass $M \times L$ eine $n + j$ -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit ist. Bestimmen Sie die Tangentialräume $T_{(x,y)}M \times L$ in Abhängigkeit von $T_x M$ und $T_y L$.

T 2

Seien $\sigma, \gamma : [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar auf $]0, 1[$ injektiv mit strikt positiver Funktionaldeterminante und gleichem Bild $M = \sigma([0, 1]^3) = \gamma([0, 1]^3)$. Zeigen Sie für eine offene Obermenge U von M und stetige $\eta \in \Omega_0^3 U, \omega \in \Omega_0^2 U$ die Identitäten

$$\int_{\sigma} \eta = \int_{\gamma} \eta \quad \text{und} \quad \int_{\partial \sigma} \omega = \int_{\partial \gamma} \omega.$$

Dies bedeutet gerade, dass die Begriffe $\int_M \eta$ und $\int_{\partial M} \omega$ wohldefiniert sind.

Hinweis:

Wegen des im Beweis zum Area-Theorem (Satz 7.5 MIT) gezeigten Satzes von Sard ist $\lambda_3(\gamma(\partial[0, 1]^3)) = 0$. Dadurch kann man die Substitutionsregel (Satz 6.5 MIT) auf γ anwenden.

T 3

- (i) Seien $r(t) = t(1-t)$ und $f :]0, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass f injektiv ist mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in]0, \pi/2[$. Ist das Bild von f eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit?
- (ii) Sei M eine kompakte n -dimensionale berandete C^k -Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass $\partial M \neq \emptyset$, falls $n = m$. Stimmt das auch, wenn man nur $n < m$ oder M abgeschlossen voraussetzt?

Übungsaufgaben

Übung: Donnerstag, 08:30-10:00 und 10:00-11:30 im E52

Diese Aufgaben werden am Mittwoch, den 13.07.2011 14:00-16:00 im E44 und

Donnerstag, den 14.07.2011 08:00-10:00 im E 52 besprochen.

Aufgabe 1

Sei $\gamma : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und injektiv auf $]0, 1[^2$ mit $\det \gamma'(t) > 0$ für alle $t \in]0, 1[^2$. Zeigen Sie für eine offene Obermenge U von $M = \gamma([0, 1]^2)$ und $f, g \in C^2(U, \mathbb{R})$ die sog. zweite Greensche Formel:

$$\int_M f \Delta g - g \Delta f d\lambda_2 = \int_{\partial M} (g D_2 f - f D_2 g) dx_1 + (f D_1 g - g D_1 f) dx_2,$$

wobei $\Delta f = D_1^2 f + D_2^2 f$ (Δ heißt Laplace-Operator).

Aufgabe 2

Seien γ wie in der Tutoriumsaufgabe T2, $M = \gamma([0, 1]^3)$ und $F, G : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar auf einer offenen Obermenge U von M mit $F = G$ auf $\gamma(\partial[0, 1]^3)$. Zeigen Sie für die Divergenz $\operatorname{div} F = D_1 F_1 + D_2 F_2 + D_3 F_3$, dass

$$\int_M \operatorname{div} F d\lambda_3 = \int_M \operatorname{div} G d\lambda_3.$$

Hinweis:

Wenden Sie den Satz von Stokes auf $\omega = F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2$ an.

Aufgabe 3

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zwei 1-Flächen (also Kurven) γ und σ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten heißen homotop in U , falls es eine 2-Fläche F gibt mit

$$F(0, t) = \gamma(t), \quad F(1, t) = \sigma(t), \quad F(t, 0) = \sigma(0) = \gamma(0) \quad \text{und} \quad F(t, 1) = \sigma(1) = \gamma(1)$$

für alle $t \in [0, 1]$. Zeigen Sie für alle geschlossenen 1-Formen $\omega \in \Omega_1^1(U)$ die Wegunabhängigkeit $\int_\gamma \omega = \int_\sigma \omega$.

Aufgabe 4

Seien $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine n -dimensionale randlose C^k -Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Zeigen Sie

$$T_x M = \{\varphi'(0) : \varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M \text{ stetig differenzierbar mit einem } \varepsilon > 0\}.$$

Stimmt das auch, wenn M berandet ist?

Aufgabe 5

Seien $K_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ und $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$, wobei $K_3 = \gamma([0, 1]^3)$ zum Beispiel mit γ wie in der Aufgabe T2 vom Blatt 10 (Insbesondere

hängen dann die Integrale $\int_{\partial\gamma} \omega$ nur von $\omega|_{S^2}$ ab.). Zeigen Sie folgenden Satz von

Brouwer:

Es gibt kein $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ mit einer offenen Obermenge $U \subseteq K_3$, so dass $F(K_3) \subseteq S^2$ und $F|_{S^2} = id$.

Mit dieser Aussage kann man übrigens relativ leicht den berühmten Brouwerschen Fixpunktsatz folgern. Dieser besagt, dass jede stetige Abbildung der n -dimensionalen Kugel in sich selbst einen Fixpunkt besitzt.

Hinweis:

Folgern Sie aus $0 = \nabla \|F\|^2$, dass $\det \nabla F = 0$ auf K_3 . Wenden Sie anschließend den Satz von Stokes auf $\omega = F_1 \wedge dF_2 \wedge dF_3$ an.

Aufgabe 6

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$ -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit, so dass es eine stetige Abbildung $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit $\|\nu(x)\| = 1$ und $\nu(x) \perp T_x M$ für alle $x \in M$. Zeigen Sie, dass M eine orientierbare Mannigfaltigkeit ist.

Hinweis:

Für jedes $x \in M$ ergänze man $\nu(x)$ zu einer ONB $\{\nu(x), m_1(x), \dots, m_{n-1}(x)\}$ des $\mathbb{R}^n$ mittels Vektoren aus $T_x M$ und zeige, dass $\mu(x) = \text{or}(m_1(x), \dots, m_{n-1}(x))$ eine Orientierung definiert.

Aufgabe 7

Formulieren Sie das AWP $f'' + f = \frac{1}{\cos(t)}$, $f(0) = f'(0) = 0$ als ein 2-dimensionales System erster Ordnung und lösen Sie dieses mittels Variation der Konstanten.