

J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2011
29.06.2011

Differentialgleichungen und Integralsätze Übungsblatt 10

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:

Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Dienstag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 05.07.2011 um 12:25 im E51 statt.

T 1

Beweisen Sie $\partial\partial I_2 = 0$, und folgern Sie $\partial\partial\Gamma = 0$ für jede 2-Kette Γ . Masochisten dürfen auch $\partial\partial I_3$ berechnen.

T 2

Sei $\gamma : [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die durch

$$\gamma(r, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} r \cos(2\pi\alpha) \cos(\pi(\beta - 1/2)) \\ r \sin(2\pi\alpha) \cos(\pi(\beta - 1/2)) \\ r \sin(\pi(\beta - 1/2)) \end{pmatrix}$$

beschriebene 3-Fläche. Bestimmen Sie das Bild $\gamma([0, 1]^3)$, $\partial\gamma$ sowie $\det \gamma'(r, \alpha, \beta)$.

T 3

Für $R > 0$ sei $\gamma_R(t) = \begin{pmatrix} R \cos(2\pi t) \\ R \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$. Zeigen Sie für $r, R > 0$, dass es eine 2-Fläche σ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gibt mit $\partial\sigma = \gamma_R \ominus \gamma_r$. Folgern Sie hieraus, dass

$$\int_{\gamma_R} \omega = \int_{\gamma_r} \omega$$

für alle geschlossenen 1-Formen $\omega \in \Omega_1^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

Übungsaufgaben

Übung: Donnerstag, 08:30-10:00 und 10:00-11:30 im E52

Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 07.07.2011, 08:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1

Sei γ wie in der Aufgabe T1 und $\sigma : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $\sigma(\alpha, \beta) = \gamma(1, \alpha, \beta)$ definiert. Bestimmen Sie $\sigma([0, 1]^2)$ sowie $\partial\sigma$, und zeigen Sie außerdem $\int_{\sigma} d\omega = 0$ für alle 1-Formen $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$.

Aufgabe 2

Für $0 \leq r \leq R$ sei $\gamma_{r,R} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\gamma_{r,R}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} (R + r \cos(2\pi\alpha)) \cos(2\pi\beta) \\ (R + r \cos(2\pi\alpha)) \sin(2\pi\beta) \\ r \sin(2\pi\alpha) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\gamma_{r,R}([0, 1]^2) = \left\{ (x, y, z) : \left(R - \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 + z^2 = r^2 \right\}$, skizzieren Sie diese Menge und, beweisen Sie außerdem $\partial\gamma_{r,R} = 0$.

Aufgabe 3

Seien $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, sowie ω durch die Standarddarstellung $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2$ gegeben, wobei

$$\omega_1(s, t) = \frac{-t}{s^2 + t^2}, \quad \omega_2(t, s) = \frac{s}{s^2 + t^2}.$$

Zeigen Sie, dass ω geschlossen aber nicht exakt ist. Beweisen Sie außerdem, dass es keine 2-Kette Γ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gibt mit $\partial\Gamma = \gamma$, wobei $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$.

Hinweis:

Betrachten Sie für den ersten Teil die 1-Fläche $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$, und wenden Sie den Satz von Stokes an.

Aufgabe 4

Sei $\omega \neq 0$ eine stetige k -Form auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es eine k -Fläche γ in U gibt mit $\int_{\gamma} \omega \neq 0$. Folgern Sie hieraus mit dem Satz von

Stokes, dass $dd\omega = 0$ für alle $\omega \in \Omega_2^k(U)$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $k = n$ und die durch $\Gamma(t) = p + \varepsilon t$ beschriebene k -Fläche.

Für die Verallgemeinerung sollten Sie die Abbildung $T(x) = p + [a_1, \dots, a_n]x$ und den zugehörigen Pull-back $T^*(\omega)$ betrachten, wobei $\omega(p)[a_1, \dots, a_n] \neq 0$.