

J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2011
22.06.2011

Differentialgleichungen und Integralsätze Übungsblatt 9

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:

Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Dienstag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 28.06.2011 um 12:25 im E51 statt.

T 1

Seien $f : U \rightarrow V$ differenzierbar sowie $\omega \in \Omega_1^k(V)$. Zeigen Sie:

- (i) Ist ω geschlossen, so ist auch $f^*\omega$ geschlossen.
- (ii) Ist ω exakt, so ist auch $f^*\omega$ exakt.

Gilt auch die Umkehrung?

T 2

Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) T ist injektiv,
- (ii) $T^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^m) \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ ist für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ surjektiv,
- (iii) $T^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^m) \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ ist für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ surjektiv.

T 3

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ sowie $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow V$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass für $p \in U$ und $1 \leq k \leq n$ die Menge

$$\mathcal{M} = \{df_{j_1}(p) \wedge \dots \wedge df_{j_k}(p) : 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m\}$$

genau dann $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ erzeugt, wenn $f'(p)$ Rang n hat. Wieso kann im Fall $m < n$ die Menge $\mathcal{M}$ kein Erzeugendensystem von $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ sein?

Hinweis:

Für $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ mit $|J| = k$ gilt $df_J(p) = f'(p)^* dx_J$.

Übungsaufgaben

Übung: Donnerstag, 08:30-10:00 und 10:00-11:30 im E52

Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 30.06.2011, 08:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) = (x \cos(y), x \sin(y))$. Berechnen Sie $f^*(dx)$, $f^*(dy)$ sowie $f^*(dx \wedge dy)$. Bestimmen Sie außerdem $d(f^*dx)$ einerseits durch explizites Ausrechnen und andererseits ohne jegliche Rechnung.

Aufgabe 2

- (i) Bestimmen Sie alle 2-Formen $\omega \in \Omega_0^2(U)$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$, und charakterisieren Sie die geschlossenen $\omega \in \Omega_1^2(U)$ anhand von Gleichungen für die Koordinatenfunktionen der Standarddarstellung.
- (ii) Seien $\omega \in \Omega_1^k(U)$, $\lambda \in \Omega_1^\ell(U)$, $\eta \in \Omega_1^m(U)$. Finden Sie eine Formel für $d(\omega \wedge \lambda \wedge \mu)$.

Aufgabe 3

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sowie $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow V$ bijektiv und differenzierbar mit differenzierbarer Inverser f^{-1} . Zeigen Sie

$$(f^{-1})^*(df_1 \wedge \dots \wedge df_n) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Aufgabe 4

Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear. Zeigen Sie, dass T genau dann surjektiv ist, wenn $T^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^m) \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ für ein $k \in \{1, \dots, m\}$ injektiv ist. Folgern Sie hieraus, dass für eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Menge

$$\mathcal{M} = \{df_{j_1}(p) \wedge \dots \wedge df_{j_k}(p) : 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m\}$$

genau dann linear unabhängig ist, wenn $f'(p)$ den Rang $m \leq n$ hat.

Hinweis:

Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn 0 ihre einzige Nullstelle ist. Für die erste Implikation finde man z_j mit $T(z_j) = e_j$. Für die andere betrachte man die duale Basis zu einer Ergänzung der Basis des Bildes von T .