J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2011
09.06.2011

Differentialgleichungen und Integralsätze
Übungsblatt 8

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Dienstag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 21.06.2011 um 12:25 im E51 statt.

T 1

Sei ∂Q der positiv orientierte Rand des Quadrats $[0,1]^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\int_{\partial Q} \langle \nabla f(x), dx \rangle = 0.$$

T 2

Seien $v_1, ..., v_{m-1} \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass es genau ein Vektor $w \in \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$\langle w, z \rangle = \det[v_1, ..., v_{m-1}, z]$$

für alle $z \in \mathbb{R}^m$. Man schreibt dann $w = v_1 \times \cdots \times v_{m-1}$. Beweisen Sie außerdem

(i) Die Abbildung $\times : (\mathbb{R}^m)^{m-1} \to \mathbb{R}^m, (v_1, ..., v_{m-1}) \mapsto v_1 \times \cdots \times v_{m-1}$ ist $(m-1)$-linear und alternierend.

(ii) Für alle $1 \leq j \leq m-1$ ist $\langle v_j, v_1 \times \cdots \times v_{m-1} \rangle = 0$.

(iii) Es gilt $\|v_1 \times \cdots \times v_{m-1}\|^2 = \det[v_1, ..., v_{m-1}, v_1 \times \cdots \times v_{m-1}]$.

(iv) Sind $v_1, ..., v_{m-1}$ linear unabhängig, so ist $v_1, ..., v_{m-1}, v_1 \times \cdots \times v_{m-1}$ eine Basis des $\mathbb{R}^m$.

T 3

Wir definieren den Raum der symmetrischen Multilinearformen

$$Sym^n(V) = \{T \in M^n(V) : T(x_\sigma) = T(x) \text{ für alle } \sigma \in S_n, x = (x_1, ..., x_n) \in V^n\}$$

sowie die Abbildung $\mathrm{Sym} : M^n(V) \to Sym^n(V)$ durch

$$\mathrm{Sym}(T) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} T(x_\sigma).$$

Zeigen Sie, dass Sym eine lineare Surjektion und eine Projektion ist mit $\mathrm{Sym}(T) = 0$ für alle $T \in \Lambda^n(V)$ und $n \geq 2$.
Hinweis:
Finden Sie eine Bijektion zwischen $\mathrm{sign}^{-1}(\{1\})$ und $\mathrm{sign}^{-1}(\{-1\})$.

Übungsaufgaben
Ausnahmsweise Übung: Mittwoch, 14:00-16:00 HS6
Diese Aufgaben sollen bis Mittwoch, den 22.06.2011, 14:00 im Übungskasten 5 oder direkt vor der Übung abgegeben werden.

Aufgabe 1
Sei $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $\partial K : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$. Zeigen Sie für stetig differenzierbares $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Formel

$$\int_K D_1 f_2 - D_2 f_1 d\lambda_2 = \int_{\partial K} \langle f(x), dx \rangle.$$

Hinweis:
Berechnen Sie die linke Seite mit Fubini und die rechte mit einer geeigneten Substitution.

Aufgabe 2
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m, W \subseteq \mathbb{R}^p$ sowie w eine k-Form auf W und $f : U \to V$, $g : V \to W$ differenzierbar. Zeigen Sie

$$(g \circ f)^*(w) = f^*(g^*(w)).$$

Aufgabe 3
Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ sei $v \times w$ so definiert wie in der Aufgabe T2. Berechnen Sie für die Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$ die Vektoren $e_j \times e_k, 1 \leq j, k \leq 3$ und zeigen Sie, dass die Abbildung $\times : (\mathbb{R}^3)^2 \to \mathbb{R}^3$ nicht assoziativ ist. Beweisen Sie außerdem für $u, v \in \mathbb{R}^3$ die Formel

$$u \times v = (u_2 v_3 - v_2 u_3, u_3 v_1 - v_3 u_1, u_1 v_2 - v_1 u_2)\,.$$

Aufgabe 4
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $V^* = M^1(V)$ der zugehörige Dualraum. Für $x \in V$ definieren wir die Auswertung $\delta_x : V^* \to \mathbb{K}$ durch $\delta_x(f) = f(x)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\delta : V \to (V^*)^* = V^{**}, x \mapsto \delta_x$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Folgern Sie hieraus, dass jede Basis $\varphi_1, ..., \varphi_n$ von V^* dual zu einer Basis $v_1, ..., v_n$ von V ist.
Hinweis:
Zeigen Sie, dass δ wohldefiniert, linear und surjektiv ist, und argumentieren Sie mit der Dimension.