J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2011
26.05.2011

Differentialgleichungen
Übungsblatt 7
Abgabe: Donnerstag, 09.06.2011, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Dienstag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 07.06.2011 um 12:25 im E51 statt.

T 1

Sei $\Phi : R_{a,b} \to \mathbb{C}^m$ wie im Satz von Peano. Zeigen Sie anhand von $\Phi(t,u) = tu$, dass $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{c}\right\}$ nicht immer maximal ist, so dass jede Lösung des AWP in $R_{a,b}$ verläuft.

T 2

Sei $a : I \to \mathbb{C}^{m\times m}$ und U eine Fundamentalmatrix des Systems

$$u'(t) = a(t)u(t).$$

Zeigen Sie, dass $V : I \to \mathbb{C}^{m\times m}$ genau dann eine weitere Fundamentalmatrix ist, wenn es eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ gibt mit $V(t) = U(t)C$ auf I. Zeigen Sie außerdem, dass die Wronski-Determinanten sich bloß um eine multiplikative Konstante unterscheiden.

T 3

Sei $\Phi : I \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ stetig und erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung, so dass $\{u \in C^1(I,\mathbb{C}^m) : u'(t) = \Phi(t,u(t))\}$ ein Unterraum von $C^1(I,\mathbb{C}^m)$ ist. Zeigen Sie, dass es eine stetige Abbildung $a : I \to \mathbb{C}^{m\times m}$ gibt mit $\Phi(t,u) = a(t)u$.

Hinweis:
Um die Linearität von $\Phi(t_0,\cdot)$ zu beweisen, untersuchen Sie die zwei AWP's $u' = au, u(t_0) = u_0$ und $v' = av, v(t_0) = v_0$. Welches AWP löst $\alpha u + \beta v$?

T 4

Die Abbildung $\Phi : I \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ erfülle eine (globale) Lipschitz-Bedingung auf I. Für $r, s \in I$ und $v \in \mathbb{C}^m$ sei die Funktion

$$t \mapsto F(t,s,v)$$

die eindeutige Lösung des AWP

$$u'(t) = \Phi(t,u(t)), \qquad u(s) = v.$$

Zeigen Sie für alle $s,t,r \in I$ und $v \in \mathbb{C}^m$ die Beziehung

$$F\left(t,s,F(s,r,v)\right) = F(t,r,v)$$

Übungsaufgaben

Übungen: Donnerstag, 08:00-10:00 und 10:00-12:00 E52

Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 09.06.2011, 08:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1

Seien $a_0, ..., a_n : I \to \mathbb{C}$ stetig, wobei $a_n(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Schreiben Sie die skalare lineare DGL

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)u^{(k)}(t) = 0$$

als explizites System erster Ordnung. Welche DGL erfüllen dann die zugehörigen Wronski-Determinanten?

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Wronski-Determinanten von Fundamentalmatrizen des Systems

$$u'(t) = \begin{bmatrix} t^2+1 & e^t \\ \sin(t^2) & 2t \end{bmatrix} u(t).$$

Aufgabe 3

Seien $a : I \to \mathbb{C}^{m\times m}$ stetig und für jedes $j \in \{1, ...m\}$, $s \in I$ sei $t \mapsto u^j(t,s)$ die eindeutige Lösung des AWP

$$u'(t) = a(t)u(t), \qquad u(s) = e_j,$$

wobei e_j wie üblich den j-ten Einheitsvektor bezeichnet. Dann heißt

$$\Lambda(t,s) = \left[u^1(t,s), ..., u^m(t,s)\right] \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

Übergangsmatrix. Zeigen Sie

(i) $\Lambda(t,t) = E_{m\times m}$,

(ii) $\Lambda(t,s)\Lambda(s,r) = \Lambda(t,r)$,

(iii) $\Lambda(t,s)^{-1} = \Lambda(s,t)$.

Bestimmen Sie $\Lambda(t,s)$ im Fall von Systemen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Aufgabe 4

(i) Seien X, Y zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $T : X^m \to Y$ eine multilineare Abbildung (das heißt für alle j ist $x \mapsto T(z_1, ..., z_{j-1}, x, z_{j+1}, ..., z_m)$ linear bei festem $z \in X^m$). Zeigen Sie für alle $a, b \in X^m$ die Formel

$$T(a_1, .., a_m) - T(b_1, ..., b_m) = \sum_{j=1}^{m} T(a_1, ..., a_{j-1}, a_j - b_j, b_{j+1}, ..., b_m).$$

(mit geeigneter Interpretation für $j = 1$ und $j = m$)

(ii) Seien jetzt $X = \mathbb{C}^n, Y = \mathbb{C}^k, f_1, ..., f_m : I \to X$ differenzierbar und $T : X^m \to \mathbb{C}^k$ multilinear und stetig. Zeigen Sie, dass $t \mapsto T(f_1, ..., f_m)$ auf I differenzierbar ist mit

$$T(f_1, ..., f_m)' = \sum_{j=1}^{m} T(f_1, ..., f_{j-1}, f_j', f_{j+1}, ..., f_m).$$

Aufgabe 5
Rechnen Sie nach, dass

$$u^1(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \qquad \text{und} \qquad u^2(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$$

Lösungen der Besselschen DGL

$$u''(t) + \frac{1}{t}u(t) + \left(1 - \frac{1}{4t^2}\right)u(t) = 0$$

sind. Bestimmen Sie das zugehörige zweidimensionale System erster Ordnung und die zugehörige Wronski-Determinante. Berechnen Sie außerdem die Inverse der zugehörigen Fundamentalmatrix.

Aufgabe 6
Sei I ein Intervall und $\Phi : I \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ stetig und beschränkt. Überlegen Sie sich zunächst, wieso die Euler-Polygonzüge auf ganz I definiert sind. Zeigen Sie anschließend, dass das AWP $u'(t) = \Phi(t, u(t))$ eine Lösung auf ganz I besitzt, indem Sie eine Teilfolge φ finden, für die $u_{\varphi(n)}$ auf jedem kompakten Teilintervall I_k von I konvergiert.
Hinweis:
Falls $u_{\varphi^k(n)}$ gleichmäßig auf I_k konvergiert wähle man eine passende Teilfolge φ^{k+1} und betrachte anschliessend die Diagonalfolge $\varphi(n) = \varphi^n(n)$.