J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2011
12.05.2011

Differentialgleichungen
Übungsblatt 5
Abgabe: Donnerstag, 19.05.2011, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Dienstag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 17.05.2011 um 12:25 im E51 statt.

T 1

Seien $b \in \mathbb{C}^m$ und $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ diagonalisierbar, das heißt, es existieren eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $S^{-1}AS = D$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $u : I \to \mathbb{C}^m$ die DGL $u' = Au + b$ genau dann löst, wenn $v = S^{-1}u$ eine Lösung der DGL $v' = Dv + S^{-1}b$ ist. Geben Sie explizite Formeln für Lösungen der ersten DGL.

T 2

Sei $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\|D_j\Phi(s,u)\| \leq C$$

für alle $s \in \mathbb{R}, j \geq 2$. Zeigen Sie, dass für die Lipschitz-Konstante L aus 2.5.(a) die Abschätzung $L \leq \sqrt{m}C$ aus 2.5.(b) optimal ist.
Hinweis:
Betrachten Sie $\Phi(s,u) = Au$ für eine geeignete Matrix A. Finden Sie dazu passende Vektoren, um die Optimalität zu zeigen.

T 3

Die Fliegen aus dem Beispiel 1.1.(e) bzw. Aufgabe 4 fliegen nun mit der Geschwindigkeit

$$u_j' = u_{j+1} - u_j \qquad \text{(wobei wieder } u_5 = u_1\text{)}.$$

Schreiben Sie dieses System als lineare vektorwertige DGL mit einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, und berechnen Sie eine Lösung des zugehörigen AWPs $u_k(0) = i^{k-1}$ mit Hilfe von T1.

Übungsaufgaben

Übungen: Donnerstag, 08:00-10:00 und 10:00-12:00 E52

Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 19.05.2011, 08:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1

Berechnen Sie für $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ explizit die Picard-Lindelöf Iterierten zur DGL $u' = Au$ mit den Anfangswerten $u(0) = u_0 \in \mathbb{C}^2$. Geben Sie explizite Formeln für die beiden Komponenten der Lösung.

Aufgabe 2

Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ besitze einen Eigenwert λ mit $\Re(\lambda) > 0$. Zeigen Sie, dass es eine unbeschränkte Lösung der DGL $u' = Au$ gibt.

Aufgabe 3

Schreiben Sie die DGL zweiter Ordnung

$$u'' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} u$$

als eine 4-dimensionale DGL erster Ordnung und lösen Sie diese.

Hinweis:

Zur Diagonalisierung dürfen (und sollten) Sie Mathematica, Matlab oder WolframAlpha benutzen.

Aufgabe 4

Es seien I ein kompaktes Intervall, $A \subseteq \mathbb{C}^m$ und $\Phi : I \times A \to \mathbb{C}^m$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Picard-Lindelöf Iterierten $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zum AWP

$$u'(t) = \Phi(t, u(t)), \qquad u(t_0) = u_0$$

in $C^2(I)$ liegen und die Folgen $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(u_n'')_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig gegen u' bzw. u'' konvergieren.