J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2011
28.04.2011

Differentialgleichungen
Übungsblatt 3
Abgabe: Donnerstag, 05.05.2011, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Dienstag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 03.05.2011 um 12:25 im E51 statt.

T 1

Lösen Sie die DGL
$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = 0$$
mit dem Algorithmus aus 1.8.

T 2

Seien $f, g : I \times J \to \mathbb{R}$ mit $f(t, u) \neq g(t, u)$ für alle $(t, u) \in I \times J$. Charakterisieren Sie die Existenz eines nullstellenfreien Eulerschen Multiplikators der Form $m(t, u) = v(t + u)$ mit stetig differenzierbarem v für die DGL
$$u'(t) \cdot g(t, u(t)) + f(t, u(t)) = 0.$$
Lösen Sie außerdem die DGL
$$(-t \cdot u(t) - u(t)^2) \cdot u'(t) + t^2 + t \cdot u(t) = 0.$$

T 3

Lösen Sie für $\alpha, \beta, m, c > 0$ die DGL der gedämpften Feder
$$mu''(t) + \alpha u'(t) + cu(t) = \sin(\beta t)$$
mit Hilfe des Algorithmus 1.8. Für welche Parameterwahl sind die Lösungen beschränkt?

Übungsaufgaben

Übungen: Donnerstag, 08:00-10:00 und 10:00-12:00 E52

Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 05.05.2011, 08:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1

Lösen Sie die zwei DGL $u''(t) - u(t) = t$ und $u''(t) + u(t) = t$ mit dem Algorithmus aus 1.8

Aufgabe 2

Finden Sie alle Lösungen der zwei folgenden DGL

(i) $2t \cdot u(t) \cdot u'(t) + t^2 + u(t)^2 + t = 0$,

(ii) $(3t^2 - u(t)^2)u'(t) - 2t \cdot u(t) = 0$.

Welche von beiden ist exakt?

Aufgabe 3

Seien $f, g : I \times J \to \mathbb{R}$ so, dass die zugehörige DGL $g(t, u(t))u'(t) + f(t, u(t)) = 0$ nicht exakt ist. Zeigen Sie: Falls es ein Intervall $K \subseteq I \cdot J$ und ein stetiges $h : K \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$\frac{D_2 f(t,u) - D_1 g(t,u)}{ug(t,u) - tf(t,u)} = h(tu),$$

für alle (t, u) mit $tu \in K$, dann ist für eine Stammfunktion H von h die Funktion $m(t, u) = \exp(H(tu))$ ein (nullstellenfreier) Eulerscher Multiplikator auf $I_0 \cdot J_0$. Finden Sie außerdem eine Lösung der DGL

$$-\frac{t^2}{u(t)} u(t)' + u(t) + t = 0$$

auf einer möglichst großen Teilmenge von $]0, \infty[^2$.

Hinweis:

Für zwei Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ist $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in A, b \in B; x = a \cdot b\}$.

Aufgabe 4

Wann ist für $a, b \in C(I)$ die DGL

$$u'(t) - a(t)u(t) - b(t) = 0$$

exakt? Zeigen Sie, dass es immer einen nur von t abhängenden Eulerschen Multiplikator gibt, und finden Sie erneut die Lösung der linearen DGL 1. Ordnung.