J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2011
21.04.2011

Differentialgleichungen
Übungsblatt 2
Abgabe: Donnerstag, 28.04.2011, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben
Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Dienstag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 26.04.2011 um 12:30 Uhr im E51 statt.

T 1
Eine Funktion $u :]0, \infty[\to]0, \infty[$ löst offenbar genau dann die DGL $u' = t \cdot u$, wenn sie auch eine der folgenden Gleichungen erfüllt:

(a) $u' - t \cdot u = 0,$ (b) $\dfrac{u'}{u} - t = 0,$

(c) $\dfrac{u'}{t} - u = 0,$ (d) $\dfrac{u'}{t \cdot u} - 1 = 0.$

Welche dieser DGL ist in dieser Form exakt? Lösen Sie diese.

T 2
Seien $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig und $u_0, t_0 > 0$. Zeigen Sie, dass $u :]0, \infty[\to]0, \infty[$ genau dann das AWP

$$u' = g\left(\frac{u}{t}\right), \quad u(t_0) = u_0$$

löst, wenn die Funktion $v(t) = \dfrac{u(t)}{t}$ das AWP

$$v' = \frac{g(v) - v}{t}, \quad g(t_0) = \frac{y_0}{t_0}$$

löst. Berechnen Sie eine Lösung der DGL

$$\frac{u'}{t} - \frac{u}{t^2} = 0$$

auf drei verschiedenen Wegen.

T 3
Zeigen Sie, dass für $u_0 > 0, 0 \neq \alpha \neq 1, a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $t_0 \in I$ das AWP

$$u' = a \cdot u + b \cdot u^\alpha, \quad u(t_0) = u_0$$

zumindest auf einer offenen Umgebung von t_0 eine Lösung besitzt. Eine lineare DGL dieser Form heißt Bernoullische DGL.
Hinweis:
Betrachten Sie die Substitution $w = u^{1-\alpha}$.

Übungsaufgaben

Übungen: Donnerstag, 08:00-10:00 und 10:00-12:00 E52

Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 28.04.2011, 08:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1
Lösen Sie die folgenden AWP's

(i) $u'(t) + \mathrm{cotan}(t)u(t) = \dfrac{2t}{\sin(t)}, \quad u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,$

(ii) $u'(t) = e^u \sin(t), \quad u(0) = 0.$

Aufgabe 2
Seien $f, g : I \times J \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $D_1 g = D_2 f$ sowie $(t_0, u_0) \in I \times J$ und $g(t_0, u_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es offene Intervalle $I_0 \subseteq I, J_0 \subseteq J$ gibt, so dass das AWP $u'g(t,u) + f(t,u), u(t_0) = u_0$ genau eine Lösung $u : I_0 \to J_0$ hat.
Hinweis:
Was bedeutet die Voraussetzung $g(t_0, u_0) \neq 0$ für die Stammfunktion von (f, g)? Welcher Satz fällt Ihnen in diesem Zusammenhang ein?

Aufgabe 3
Lösen Sie die zwei folgenden AWP's

(i) $u'(t) = \dfrac{u(t)}{t} + \sqrt{1 + \dfrac{u^2(t)}{t^2}}, u(2) = 0,$

(ii) $u'(t) = \dfrac{t^2 + u^2(t)}{t \cdot u(t)}, u(e) = \sqrt{2}e.$

Aufgabe 4
Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(t,u) = \frac{u}{t^2 + u^2} \qquad\qquad g(t,u) = -\frac{t}{t^2 + u^2}.$$

Zeigen Sie, dass (f, g) keine Stammfunktion besitzt, obwohl sie die Integrabilitätsbedingung $D_2 f = D_1 g$ erfüllen. Wieso ist dies kein Widerspruch zu 1.7.c?
Hinweis:
Betrachten Sie $\varphi(t) = F(\cos(t), \sin(t))$. Wieso kann φ nicht 2π-periodisch sein?