J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2011
14.04.2011

Differentialgleichungen
Übungsblatt 1
Abgabe: Donnerstag, 21.04.2011, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium:
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am Dienstag im Tutorium besprochen. Dieses findet am 19.04.2011 um 12:00 im E44 statt.

T 1

Finden Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen, lösen Sie die zugehörigen Anfangswertprobleme und bestimmen Sie die maximalen Lösungsintervalle:

(a) $u'(t) = -\frac{u(t)}{t} + e^{-t^2/2}$ mit $u(1) = 0$,

(b) $u'(t) = e^t(1 + u^2(t))$ mit $u(0) = 0$.

T 2

Seien I ein Intervall, $a, b \in C(I)$ sowie $v \in C^1(I)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$v' = a \cdot v$$

ohne Nullstellen. Man zeige ohne Satz 1.3 zu benutzen, dass es eine Lösung u der DGL

$$u' = a \cdot u + b$$

gibt mit $u(t) = c(t)v(t)$ für ein stetig differenzierbares $c \in C(I)$. Welche Differentialgleichung muss c erfüllen?

T 3

Seien $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ und $u : I \to \mathbb{R}^m$ eine Lösung einer autonomen DGL der Form

$$\Phi(u, u', ..., u^{(n)}) = 0.$$

Auf welchem Intervall ist für $t_0 \in \mathbb{R}$ die Abbildung $t \mapsto u(t - t_0)$ (wohl-)definiert? Zeigen Sie, dass sie auf diesem Intervall ebenfalls eine Lösung der obigen DGL ist. Finden Sie außerdem eine nicht-autonome lösbare DGL bei der diese Aussage ebenfalls gilt.

Übungsaufgaben

Übungen: Donnerstag, 08:00-10:00 und 10:00-12:00 E52

Diese Aufgaben sollen bis Donnerstag, den 21.04.2011, 08:00 im Übungskasten 5 abgegeben werden.

Aufgabe 1

Finden Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen, lösen Sie die zugehörigen Anfangswertprobleme und bestimmen Sie die maximalen Lösungsintervalle:

(a) $u'(t) = \dfrac{t \cdot u(t) + 1}{t^2 + 1}$ mit $u(0) = 1$,

(b) $u'(t) = -\dfrac{t}{u}$ mit $u(0) = 1$.

Aufgabe 2

Seien $a, b \in C(I)$ und $u : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL

$$u'' = a \cdot u' + b \cdot u \tag{$*$}$$

ohne Nullstellen sowie $w : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL

$$w' = \left(a - 2\frac{u'}{u}\right) w. \tag{$**$}$$

Zeigen Sie, dass für jede Stammfunktion W einer Lösung $w \neq 0$ von $(**)$ die Abbildung $v = W \cdot u$ eine weitere, von u linear unabhängige Lösung von $(*)$ ist. Finden Sie zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgeleichung

$$u''(t) = 2\frac{tu'(t) - u(t)}{1 - t^2}.$$

Aufgabe 3

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + f'(x) = 0$. Zeigen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Hinweis:

Betrachten Sie eine geeignete DGL der Form $f' = -f + g$.

Aufgabe 4

Die Fliegen aus Beispiel 1.1 (e) fliegen (wegen nachlassender Motivation und wachsender Fliehkräfte) nicht mit konstanter Geschwindigkeit. Diese soll jetzt proportional zum Abstand zur Nachbarin sein, also

$$v_j' = \alpha(v_{j+1} - v_j) \qquad \text{statt} \qquad u_j' = \frac{u_{j+1} - u_j}{|u_{j+1} - u_j|}.$$

Lösen Sie dieses System unter den gleichen Plausibilitätsbedingungen wie in 1.1.(e). Vergleichen Sie die Flugbahn $\{v_1(t) : t \in [0, \infty[\}$ mit der entsprechenden Flugbahn von u_1 aus 1.1.(e). Versuchen Sie diese zu erklären.