Das Caratheodory-Kriterium:

Für jedes metrische Maß μ^* auf einem metrischen Raum (X, d) ist die Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(X, d)$ in $\mathscr{A}(\mu^*)$ enthalten.

Beweis. Wir erinnern zuerst daran, dass $A, B \subseteq X$ separiert heißen, falls $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > 0$, und dass ein äußeres Maß metrisch heißt, falls $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ für alle separierten Mengen gilt. Wir zeigen zuerst eine Stetigkeitseigenschaft:

$(*)$ Seien $E_n \subseteq X$ eine Folge mit $E_n \nearrow E$, so dass E_n und $E \setminus E_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ separiert sind. Dann gilt $\mu^*(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(E_n)$.

In der Tat, wegen der Monotonie existiert $c = \lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(E_n)$, und es gilt $c \leq \mu^*(E)$. Falls $c = \infty$, ist nichts zu zeigen, und andernfalls disjunktisieren wir zu $A_1 = E_1$ und $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$. Wegen $A_n \subseteq E_n$ und $\bigcup\limits_{k\geq n+2} A_k \subseteq E \setminus E_{n+1}$ sind A_n und $\bigcup\limits_{k\geq n+2} A_k$ separiert, und wir erhalten

$$\sum_{n=1}^{m} \mu^*(A_{2n}) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_{2n}\right) \leq \mu^*(E_{2m}) \leq c \text{ sowie}$$
$$\sum_{n=1}^{m} \mu^*(A_{2n-1}) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_{2n-1}\right) \leq \mu^*(E_{2m-1}) \leq c.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ in $\mathbb{R}$, und es folgt

$$\mu^*(E) = \mu^*\left(E_n \cup \bigcup_{k\geq n+1} A_k\right) \leq \mu^*(E_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(A_k) \to c.$$

Seien nun $A \subseteq X$ abgeschlossen und $T \subseteq X$ eine Testmenge. Weil A abgeschlossen ist, gilt $\operatorname{dist}(x, A) > 0$ für alle $x \notin A$ und deshalb ist $T \setminus A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ mit $E_n = \{x \in T : \operatorname{dist}(x, A) \geq 1/n\}$. Um $(*)$ auf $E = T \setminus A$ anzuwenden, zeigen wir, dass E_n und $E \setminus E_{n+1}$ separiert sind. Für $x \in E_n$ und $y \in E \setminus E_{n+1}$ gibt es $a \in A$ mit $d(y, a) < 1/(n + 1)$, und die untere Dreiecksungleichung liefert

$$d(x, y) \geq d(x, a) - d(y, a) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Also ist $\operatorname{dist}(E_n, E \setminus E_{n+1}) \geq 1/n(n + 1) > 0$.

Mit $(*)$ folgt nun $\mu^*(T \setminus A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(E_n)$, und weil E_n und $T \cap A$ separiert sind, erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mu^*(T) &= \mu^*((T\cap A) \cup (T \setminus A)) \geq \mu^*((T\cap A)\cup E_n)\\ &= \mu^*(T\cap A) + \mu^*(E_n) \to \mu^*(T\cap A) + \mu^*(T\setminus A).\end{aligned}$$

Wegen 5.1(f) folgt damit $A \in \mathscr{A}(\mu^*)$. Weil die abgeschlossenen Mengen die Borel-σ-Algebra erzeugen und $\mathscr{A}(\mu^*)$ eine σ-Algebra ist, erhalten wir schließlich $\mathscr{B}(X,d) \subseteq \mathscr{A}(\mu^*)$. $\square$