J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2010
05.07.2010

**Analysis einer und mehrerer Veränderlicher**
**Übungsblatt 11**
Abgabe: Mittwoch, 14.07.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

---

**Tutoriumsaufgaben**
Tutorium: Dienstag, 16:00-18:00, HS9
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am 06.07.2010 im Tutorium besprochen.

**T 1**
Für eine konvexe Teilmenge $A$ von $\mathbb{R}^n$ heißt eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ konvex, wenn für alle $x, y \in A, t \in [0, 1]$ gilt

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Zeigen Sie:

(a) Wenn $f : A \to \mathbb{R}$ konvex und in $\xi$ in jede Richtung differenzierbar ist mit $\nabla f(\xi) = 0$, so ist $f(\xi) = \min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

(b) Es seien $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + 2x + 2y$, minimieren Sie $f$.

**T 2**
Eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ erfüllt die Wellengleichung für $c > 0$, wenn

$$\sum_{j=1}^{n} D_j^2 f - c^2 D_{n+1}^2 f = 0.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $g \in C^2(\mathbb{R}), u \in \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$\Psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \Psi(x) = g\left(\sum_{j=1}^{n} u_j x_j + \frac{\|u\|}{c} x_{n+1}\right)$$

eine Lösung der Wellengleichung definiert.
Zeigen Sie für $n = 1$, dass die Funktion $\eta(x, t) = g(x + t/c) - g(x - t/c)$ eine Lösung der Wellengleichung liefert.

**T 3**

(a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $\eta = f(\xi)$. Zeigen Sie

$$\nabla(g \circ f)(\xi) = \nabla g(f(\xi))\nabla f(\xi).$$

(b) Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(x,y) = (xy, x^2+y^2)$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $g(t,s) = \exp(2t+s)$. Berechnen Sie $\nabla(g \circ f)$ in allen Punkten $(x,y)$ einerseits durch (a) und andererseits, indem Sie $g \circ f$ explizit berechnen und partiell differenzieren.

---

## Übungsaufgaben

Übungen: Mittwoch, 12:00-14:00, E51 und Donnerstag, 08:00-10:00, HS4
Diese Aufgaben sollen bis Mittwoch, den 14.07.2010, 10:00 abgegeben werden.

**Aufgabe 1**
Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $f : A \to Y$ differenzierbar und $a, b, c \in A$. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in A$ existiert, so dass

(a) für $Y = \mathbb{R}$ gilt $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$,

(b) für $Y = \mathbb{C}^n$ gilt $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(\xi)(b-a)\|$,

(c) für $Y = \mathbb{C}^n$ gilt $\|f(b) - f(a) - f'(c)(b-a)\| \leq \|(f'(\xi) - f'(c))(b-a)\|$.

**Hinweis:**
Betrachten Sie für (b) die Abbildung $g(x) = \Re\left(\langle f(x), \overline{f(b) - f(a)}\rangle\right)$.

**Aufgabe 2**
Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \dfrac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ sowie $f(0,0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Funktionen $t \mapsto f(tv)$ für jede Richtung $v$ ein Minimum in $t = 0$ haben, aber $f(0,0)$ kein lokales Minimum von $f$ ist. Plotten Sie den Graphen (z.B. mit Mathematica) für $(x,y) \in [-1,1]^2$.
**Hinweis**
Es reicht Richtungen der Form $v = (a,b)$ mit $\|\nu\| = 1$ zu betrachten.

**Aufgabe 3**
Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\xi \in \mathring{A}$, sowie $v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) $D_v f(\xi) = 0 \Longleftrightarrow v \perp \nabla f(\xi)$,

(b) $\nabla f(\xi) = 0 \Longrightarrow D_v f(\xi) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

**Aufgabe 4**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = x^2 - y^2$. Bestimmen Sie alle offenen konvexen Mengen auf denen $f$ beziehungsweise $-f$ konvex ist. Plotten Sie den Funktionsgraphen von $f$.