J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2010
28.06.2010

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Übungsblatt 10
Abgabe: Mittwoch, 07.07.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium: Dienstag, 16:00-18:00, HS9
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am 29.06 im Tutorium besprochen.

T 1

Seien $A \subseteq \mathbb{C}$ konvex und offen sowie $g : A \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion ohne Nullstellen. Zeigen Sie, dass es eine stetig differenzierbare Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ gibt mit $g = \exp \circ f$.

T 2

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Räume. Zeigen Sie, dass

$$|||T||| = \sup\{\|T(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$$

eine Norm auf $L(X,Y) = \{T : X \to Y : T \text{ linear und stetig }\}$ definiert.

T 3

Für normierte Räume X, Y, Z heißt eine Abbildung $T : X \times Y \to Z$ bilinear, wenn für alle $x \in X, y \in Y$ die Abbildungen $T(x, \cdot)$ und $T(\cdot, y)$ linear sind.
Zeigen Sie, dass jede bilineare Funktion $f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^k$ differenzierbar ist mit $f'(\xi, \eta)(x, y) = f(\xi, y) + f(x, \eta)$.

Übungsaufgaben

Übungen: Mittwoch, 12:00-14:00, E51 und Donnerstag, 08:00-10:00, HS4
Diese Aufgaben sollen bis Mittwoch, den 07.07.2010, 10:00 abgegeben werden.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ auf $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ eine Stammfunktion besitzt, aber nicht auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Hinweis:
Eine ähnliche Konstruktion wie in Blatt 9, Aufgabe 1 funktioniert auch, wenn es ein $\omega \in A$ gibt, mit $\{\omega + t(z - \omega) : t \in [0, 1]\} \subseteq A$ für alle $z \in A$.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ in jedem $\xi \neq 0$ differenzierbar ist. Gilt das auch in $\mathbb{C}^n$? (vgl. 7.1.(e), Beispiel 6)

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$ differenzierbar ist und berechnen Sie die lineare Abbildung $f'(\xi, \eta)$.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} x & , y = x^2, x > 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$. Untersuchen Sie, welche Richtungsableitungen $D_\nu f(0,0)$ existieren, ob $\nu \mapsto D_\nu f(0,0)$ linear ist, und ob f in $(0,0)$ differenzierbar ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass es $a, b, c \in \mathbb{C}$ gibt mit $ab^n n^c \binom{3n}{n} \to 1$.