J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2010
21.06.2010

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Übungsblatt 9
Abgabe: Mittwoch, 30.06.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium: Dienstag, 16:00-18:00, HS9
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am 22.06 im Tutorium besprochen.

T 1

Für die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{it}$ und $|z| < 1$ definieren wir für $s \in [0, 1]$ die Funktion

$$F(s) = \int_\gamma \frac{1}{\zeta - sz} d\zeta.$$

Zeigen Sie, ohne den Satz von Cauchy zu benutzen, dass F differenzierbar auf $[0, 1]$ ist mit $F' = 0$ und folgern Sie daraus $F(1) = F(0) = 2\pi i$.

T 2

Sei f auf einer offenen Menge $A \supseteq \overline{B}(z_0, R)$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie für $|z - z_0| < R$ und die Kurve $\gamma = [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + Re^{it}$

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Hinweis:
Differenzieren Sie die Cauchy-Integralformel nach dem „Parameter“ z.

T 3

Sei f eine auf einer offenen Menge $A \supseteq \overline{B}(z, R)$ stetig differenzierbare Funktion.

(i) Zeigen Sie $\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \max \left\{ \frac{|f(\zeta)|}{R^n} : |\zeta - z| = R \right\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass jede beschränkte, auf $\mathbb{C}$ stetig differenzierbare Funktion f konstant ist.

Übungsaufgaben

Übungen: Mittwoch, 12:00-14:00, E51 und Donnerstag, 08:00-10:00, HS4
Diese Aufgaben sollen bis Mittwoch, den 30.06.2010, 10:00 abgegeben werden.

Aufgabe 1

Seien f eine auf einer offenen konvexen Menge A stetig differenzierbare Funktion mit $0 \in A$.

(i) Zeigen Sie, dass durch $F(z) = \int\limits_0^1 zf(tz)dt$ eine differenzierbare Funktion auf A definiert ist mit $F' = f$.

(ii) Sei γ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve in A. Zeigen Sie

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$$

Aufgabe 2
Entwickeln Sie die Taylor-Reihe des Arcussinus um 0.
Hinweis:
Versuchen Sie nicht, die höheren Ableitungen in 0 explizit zu berechnen. Benutzen Sie stattdessen die Binomialreihe mit $\alpha = -1/2$.

Aufgabe 3
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $g_\alpha :]0,\infty[\to \mathbb{C}$ definiert durch $g_\alpha(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}$. Zeigen Sie, dass g_α für $\alpha > 0$ über $]0,\infty[$ integrierbar?
Für solche $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die Gamma-Funktion

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Zeigen Sie für diese α die Beziehung $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ und berechnen Sie $\Gamma(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\Gamma(1/2)$.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die auf $]0,\infty[$ durch

$$F(\alpha) = \int\limits_0^\infty \exp(-\alpha x)\frac{\sin(x)}{x}dx$$

definierte Funktion differenzierbar ist. Berechnen Sie die Ableitung und folgern Sie hieraus $F(\alpha) = \pi/2 - \arctan(\alpha)$.
Hinweis:
Auch wenn Satz 8.9 nur für kompakte Intervalle formuliert ist, dürfen Sie ihn hier anwenden. Betrachten Sie zum Berechnen der Konstante $C = F(\alpha) - \arctan(\alpha)$ den Grenzübergang $\alpha \to \infty$.