J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2010
14.06.2010

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Übungsblatt 8
Abgabe: Mittwoch, 23.06.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben
Tutorium: Dienstag, 16:00-18:00, HS9
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am 15.06 im Tutorium besprochen.

T 1

(i) Zeigen Sie die Existenz von $\displaystyle\int_{-1+}^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(ii) Untersuchen Sie für $p \geq 0$ die durch $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^p}$ definierte Funktion $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ auf Integrierbarkeit an ∞.

T 2
Sei $f :]0,1[\to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion für die ein festes $C > 0$ und $p \in \mathbb{R}$ existieren mit $|f(x)| \leq Cx^p$ für alle $x \in]0,1[$. Für welche p ist die Funktion f integrierbar an 0? Für welche $p \in \mathbb{R}$ existiert das Integral $\displaystyle\int_{0+}^{\infty} x^p dx$?

T 3
Bestimmen Sie für $p \in [0,1]$ eine „möglichst" einfache Folge $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, so dass $x_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ konvergiert.

Übungsaufgaben
Übungen: Mittwoch, 12:00-14:00, E51 und Donnerstag, 08:00-10:00, HS4
Diese Aufgaben sollen bis Mittwoch, den 23.06.2010, 10:00 abgegeben werden.

Aufgabe 1
Seien $f, g : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie, dass fg an ∞ integrierbar ist, falls

(i) g monoton und stetig differenzierbar ist mit $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ und

(ii) f eine beschränkte Stammfunktion F besitzt.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \log(n) \left(\log(\log(n))\right)^p}$$

für $p > 1$ konvergiert und für $p \leq 1$ divergiert.

Aufgabe 3
Sei $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ auf jedem abgeschlossenen Teilinterval integrierbar. Zeigen Sie, dass die Integrierbarkeit von $|f|$ an a und b die Integrierbarkeit von f an a und b impliziert. Stimmt auch die Umkehrung?
Hinweis:
Betrachten Sie $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Aufgabe 4
Impliziert die Integrierbarkeit einer stetigen Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ an ∞, dass $\lim\limits_{x \to \infty} |f(x)| = 0$? Untersuchen Sie dazu $f(x) = \sin(x^2)$.