J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2010
31.05.2010

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Übungsblatt 6
Abgabe: Mittwoch, 16.06.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium: Dienstag, 16:00-18:00, HS9
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am 01.06 im Tutorium besprochen.

T 1
Berechnen Sie für $0 < a < b < \pi$ und $x, y, c \in \mathbb{R}$ die folgenden Integrale

(i) $\displaystyle\int_x^y \exp(ct)\sin(\lambda t)dt$, **(ii)** $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sin(t)}dt$, **(iii)** $\displaystyle\int_1^e \frac{\log(t)}{t}dt$.

T 2
Zeigen Sie, dass $\cosh : [0,\infty[\to [1,\infty[$ eine streng monotone Bijektion ist. Beweisen Sie für $a, b > 1$ mit der Substitution $x = \cosh(t)$ und der Identität $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcosh}(b) - \operatorname{arcosh}(a)$$

wobei $\operatorname{arcosh} : [1,\infty[\to [0,\infty[$ durch $\operatorname{arcosh}(t) = \cosh^{-1}(t)$ definiert ist.

T 3
Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die zwei Formeln:

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}$, **(ii)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)dx = \prod_{j=1}^n \frac{2j}{2j+1}$.

Übungsaufgaben

Übungen: Mittwoch, 12:00-14:00, E51 und Donnerstag, 08:00-10:00, HS4
Diese Aufgaben sollen bis Mittwoch, den 16.06.2010, 10:00 abgegeben werden.

Aufgabe 1
Berechnen Sie für $0 < a < b < \pi/2$ und $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_x^y t\exp(-t^2/2)dt$, **(ii)** $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\tan^2(t)}dt$, **(iii)** $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1+\sin(t)}dt$.

Hinweis
Versuchen Sie für (iii) die Substitution $\sin(t) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, wobei $x = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

Aufgabe 2

Seien $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig, sowie $\ell, r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \Phi(t)=\int\limits_{\ell(t)}^{r(t)} f(x)dx$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist und bestimmen Sie $\Phi'(t)$.

Hinweis:

Für eine Stammfunktion F von f, betrachten Sie $F(\rho)-F(\lambda)$.

Aufgabe 3

(i) Begründen Sie für $a>0, n\in\mathbb{N}$ die Existenz des folgenden Integrals und zeigen Sie

$$\int\limits_0^1 x^a \log^n(x)dx = (-1)^n \frac{n!}{(a+1)^{n+1}}.$$

(ii) Beweisen Sie mit (i) die Gleichung $\int\limits_0^1 x^x dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n)^n}$.

Hinweis:

Die Exponentialreihe konvergiert auf $[-1/e, 0]$ gleichmäßig.

Aufgabe 4

(i) Zeigen Sie für die durch $f(t)=\begin{cases}\exp(-1/t) & : t>0\\ 0 & : t\leq 0\end{cases}$ definierte Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dass $f\in C^n(\mathbb{R})$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

(ii) Sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mit $g(t)=\exp(-1/t^2)$ für $t\neq 0$ und $g(0)=0$. Zeigen Sie $g\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C^n(\mathbb{R})$. Wieso ergibt die selbe Definition von g auf $\mathbb{C}$ noch nicht einmal eine stetige Funktion?

Aufgabe 5

(i) Sei $h\in C^{n+1}([0,1])$. Zeigen Sie mittels partieller Integration

$$h(1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{h^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{n!}\int\limits_0^1 h^{(n+1)}(t)(1-t)^n dt.$$

(ii) Seien $A\subseteq\mathbb{C}$ konvex und $f\in C^{n+1}(A)$. Zeigen Sie, daß für $\xi, x\in A$ gilt:

$$f(x)-T_{f,\xi,n}(x) = \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!}\int\limits_0^1 f^{(n+1)}(\xi+t(x-\xi))(1-t)^n dt.$$

Aufgabe 6

Zeigen Sie für $f\in C^1([-\pi,\pi])$ mittels partieller Integration

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(inx)dx = 0.$$