J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2010
17.05.2010

**Analysis einer und mehrerer Veränderlicher**
**Übungsblatt 6**
Abgabe: Mittwoch, 02.06.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

---

**Tutoriumsaufgaben**
Tutorium: Dienstag, 16:00-18:00, HS9
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am 18.05 im Tutorium besprochen.

**T 1**
Bestimmen Sie die Intervalle in denen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-x^2/2)$ konvex ist.

**T 2**
Sei $f \in D^1(]a,b[)$ mit $f'$ differenzierbar in $x \in ]a,b[$. Zeigen Sie, dass der Quotient

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

für $h \to 0$ gegen $f''(x)$ konvergiert. Folgt aus der Existenz des Grenzwerts bereits die Differenzierbarkeit von $f'$ in $x$?

**T 3**

(i) Seien $f \in D^n([a,b])$ sowie $\alpha \in [a,b]$. Zeigen Sie $(T_{f,\alpha,n})^{(k)} = T_{f^{(k)},\alpha,n-k}$ für $k \leq n$.

(ii) Sei $f \in D^n(]a,b[)$ und $P$ ein Polynom vom Grad $n$, so dass $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$ für alle $0 \leq k \leq n$ und ein $\alpha \in ]a,b[$. Zeigen Sie, dass $P = T_{f,\alpha,n}$.

---

**Übungsaufgaben**
Übungen: Mittwoch, 12:00-14:00, E51 und Donnerstag, 08:00-10:00, HS4
Diese Aufgaben sollen bis Mittwoch, den 02.06.2010, 10:00 abgegeben werden.

**Aufgabe 1**

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,\infty[ \to \mathbb{R}, x \mapsto x\log(x)$ (mit $f(0) = 0$) konvex ist.

(ii) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton wachsend. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ konvex ist.

(iii) Beweisen Sie auf zwei verschiedene Weisen, dass $g : ]0,\infty[ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^x$ konvex ist, einmal mit und ohne (ii) zu benutzen.

**Aufgabe 2**
Seien $f, g : ]0,1[\to \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) = x$ und $g(x) = x + x^2 \exp(-i/x^2)$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$ aber

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Wieso ist das kein Widerspruch zur Regel von l'Hospital?

**Aufgabe 3**

(i) Beweisen Sie für $f, g \in D^n(A)$ die Formel

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

(ii) Sei zusätzlich $h \in D^n(f(A))$. Bestimmen Sie die Formel zur Berechnung von $(h \circ f)^{(n)}(x)$ für $n = 2$ und $n = 3$.

**Aufgabe 4**

(i) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex, $x_1, ..., x_n \in [a,b]$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ mit $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Beweisen Sie

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

(ii) Zeigen Sie für $x_1, ..., x_n > 0$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ mit $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ die folgenden zwei Ungleichungen:

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \qquad \text{und} \qquad \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

**Aufgabe 5**
Sei $f \in D^2(]a,b[)$ mit $f''$ stetig in $x \in ]a,b[$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{h} \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) \right|$$

für $h \to 0$ gegen 0 konvergiert. Dies bedeutet gerade, dass der „zentrale Differezenquotient“ eine sehr gute Approximation der Ableitung liefert.

**Aufgabe 6**
Seien $f \in D^{n-1}([a,b])$ und $f^{(n-1)}$ in $\xi \in [a,b]$ differenzierbar. Zeigen Sie

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - T_{f,\xi,n}(x)}{(x-\xi)^n} = 0.$$

**Hinweis:** Wenden Sie $n-1$ mal l'Hospital an.