J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2010
10.05.2010

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Übungsblatt 5
Abgabe: Mittwoch, 19.05.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium: Dienstag, 16:00-18:00, HS9
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am 11.05 im Tutorium besprochen.

T 1

Zeigen Sie für $x \in [0, \pi/2]$ die Ungleichungen:

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x.$$

T 2

Zeigen Sie, dass $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ eine Bijektion ist und berechnen Sie $\lim\limits_{x \to \bigstar} \arctan(x)$ für $\bigstar \in \{-\infty, +\infty\}$.

T 3

Zeigen Sie, dass die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie diese:

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^\alpha}$ für $\alpha > 0$,

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$.

Übungsaufgaben

Übungen: Mittwoch, 12:00-14:00, E51 und Donnerstag, 08:00-10:00, HS4
Diese Aufgaben sollen bis Mittwoch, den 19.05.2010, 10:00 abgegeben werden.

Aufgabe 1

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f'(x) = cf(x)$ für ein festes $c \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $f(x) = f(0)\exp(cx)$ gilt.

(ii) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^p$ für ein $p > 1$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Hinweis
Differenzieren Sie die durch $\exp(-cx)f(x)$ gegebene Funktion.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie diese:

(i) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$,

(ii) $\lim_{x\to \pi/2}\left(\tan(x)+\frac{1}{x-\pi/2}\right)$.

Aufgabe 3

(i) Zeigen Sie für alle $x>0$ die folgenden Ungleichungen:

$$0<x^2/2+\log(1+x)-x<x^3/3.$$

(ii) Sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch $g(x)=x\left(1+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ für $x\neq 0$ und $g(0)=0$. Zeigen Sie, dass f in 0 differenzierbar ist mit $f'(0)>0$, und dass jede Umgebung der 0 Intervalle enthält, in denen f monoton fällt.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass $f:]0,\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ streng monoton ist und bestimmen Sie das Bild $f(]0,\infty[)$.