J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2010
03.05.2010

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Übungsblatt 4
Abgabe: Mittwoch, 12.05.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben
Tutorium: Dienstag, 16:00-18:00, HS9
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am 04.05 im Tutorium besprochen.

T 1
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x\exp(-x^2)$. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion f auf $[-1, 1]$ und auf $\mathbb{R}$.

T 2
Sei $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $|f'(x)| \le C$ für alle $x \in]a, b[$ mit einer Konstante $C > 0$. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert.
Hinweis Gleichmäßige Stetigkeit.

T 3
Zeigen Sie für alle $x \in]-1, 1[$ die Gleichung $2\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

Übungsaufgaben
Übungen: Mittwoch, 12:00-14:00, E51 und Donnerstag, 08:00-10:00, HS4
Diese Aufgaben sollen bis Mittwoch, den 12.05.2010 10:00 abgegeben werden.

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass $x\log(x)$ für $0 < x \to 0$ gegen 0 konvergiert und minimieren Sie die Funktion $x\log(x)$ auf $[0, 1]$ und auf $[0, \infty[$. Dabei ist der Funktionswert an der Stelle $x = 0$ als 0 zu verstehen.

Aufgabe 2
Sei $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ differenzierbar und es existiere $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = c$. Zeigen Sie, dass dann auch der Grenzwert $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert, und dass f in a differenzierbar ist.

Aufgabe 3
(i) Beweisen Sie für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ die folgende Formel OHNE vollständige Induktion zu benutzen

$$\sum_{k=1}^{n-1} kz^{k-1} = \frac{(n-1)z^n - nz^{n-1} + 1}{(z-1)^2}.$$

(ii) Zeigen Sie für alle $x, y \in]-1, 1[$ die Gleichung

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Hinweis
Differenzieren Sie für (i) beide Seiten der geometrischen Summenformel.

Aufgabe 4
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) < \gamma < f'(b)$. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in]a, b[$ gibt mit $f'(\xi) = \gamma$.
Hinweis
Untersuchen Sie die Extrema der Funktion $x \mapsto f(x) - \gamma x$.