J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2010
26.04.2010

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 05.05.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium: Dienstag, 16:00-18:00, HS9

Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am 27.04 im Tutorium besprochen.

T 1

Sei $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ eine in 0 differenzierbare Funktion. Wir definieren $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $g(x) = \begin{cases} f(x) & : x \geq 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases}$. Zeigen Sie, dass g genau dann in 0 differenzierbar ist, wenn $f(0) = f'(0) = 0$.

T 2

Für $p \in \mathbb{C}$ sei die Abbildung $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) = x^p$. Zeigen Sie, dass diese Funktion differenzierbar ist und bestimmen Sie ihre Ableitung.

T 3

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den Sinus Hyperbolicus durch $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Zeigen Sie, dass $\sinh$ eine streng monotone Bijektion auf $\mathbb{R}$ ist, und dass seine Umkehrfunktion arsinh (Areasinus Hyperbolicus) differenzierbar ist. Bestimmen Sie außerdem arsinh' .

Übungsaufgaben

Übungen: Mittwoch, 12:00-14:00, E51 und Donnerstag, 08:00-10:00, HS4

Diese Aufgaben sollen bis Mittwoch, den 05.05.2010 10:00 abgegeben werden.

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

- (i) $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^x$,
- (ii) $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{(x^x)}$,
- (iii) $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^x)^x$,
- (iv) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \sin(\cos(z))$.

Aufgabe 2

Seien $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ohne Nullstellen, die in $\xi \in A$ differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass die durch $g(x) = \log(|f(x)|)$ auf A definierte Abbildung differenzierbar in ξ ist, mit der Ableitung $g'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$.

Aufgabe 3

Seien $f_1, \dots, f_n$ differenzierbar in ξ . Zeigen Sie in diesem Fall die Formel

$$\left(\prod_{k=1}^n f_k \right)'(\xi) = \sum_{k=1}^n f_k'(\xi) \prod_{j=1, j \neq k}^n f_j(\xi)$$

einerseits durch Induktion und andererseits im Fall $f_k > 0$ durch „logarithmisches Differenzieren“ also anhand der Formel $g' = (\log \circ g)'g$ aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4

Für welche $a > 0$ ist die durch $f(x) = |x|^a \sin(1/x)$ gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in 0? Wann ist auch die Ableitung stetig in 0?