J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2010
19.04.2010

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Übungsblatt 2
Abgabe: Mittwoch, 28.04.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium: Dienstag, 16:00-18:00, HS9
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am 20.04 im Tutorium besprochen.

T 1

Sei $f : [-1, 0] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar über $[-1, 0]$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{C}, g(x) = f(-x)$ über $[0, 1]$ integrierbar ist mit

$$\int_0^1 f(-x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx.$$

T 2

Zeigen Sie für $a \leq b \leq c$ mit Hilfe von Satz 6.5 die folgende Aussage: Ist $f \in RI(a, c)$ so folgt bereits $f \in RI(a, b)$.

T 3

Berechnen Sie $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx$ sowie $\int_0^b \cos(x)dx$ für ein $b > 0$.

Übungsaufgaben

Übungen: Mittwoch, 12:00-14:00, E51 und Donnerstag, 08:00-10:00, HS4
Diese Aufgaben sollen bis Mittwoch, den 28.04.2010 10:00 abgegeben werden.

Aufgabe 1

Sei $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ affin linear und monoton wachsend, also von der Form $\varphi(t) = a + t(b - a)$ mit $a \leq b$. Beweisen Sie, dass $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ genau dann über $[a, b]$ integrierbar ist, wenn $f \circ \varphi$ über $[0, 1]$ integrierbar ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(\varphi(t))dt.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N+n} = \int_1^2 \frac{1}{t}dt = \log(2).$$

Hinweis
Betrachten Sie für die zweite Gleichung die durch $x_k = 2^{k/n}$ definierte Partition mit den Stützstellen $\xi_k = x_{k-1}$. Die Aufgabe T3 (ii) auf dem Blatt 1 kann hilfreich sein.

Aufgabe 3

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $\int_a^b f(x)dx = 0$. Zeigen Sie, dass bereits $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ gelten muss. Stimmt diese Aussage auch, wenn man statt Stetigkeit nur Integrierbarkeit verlangt?

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Hinweis
Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{2N} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N+k}$

Bonusaufgabe 1
Für $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend und $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ definiert man für $\xi \sqsubseteq \mathscr{P} = \{a = x_0 < ... < x_n = b\}$ die Riemann-Stieltjes Summe durch

$$RS_g(f, \mathscr{P}, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left(g(x_k) - g(x_{k-1})\right).$$

Genau wie in 6.1 heißt dann eine Funktion f Riemann-Stieltjes integrierbar, wenn die Summen konvergieren. Der Grenzwert wird ensprechend Riemann-Stieltjes Integral genannt, und mit $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ bezeichnet. Alle Aussagen aus Kapitel 6 bleiben dabei wahr. Insbesondere sind Regelfunktionen (und damit stetige Funktionen) Riemann-Stieltjes integrierbar. Wegen Blatt 1, Aufgabe 3 sind monotone Funktionen damit ebenfalls Riemann-Stieltjes integrierbar.
Zeigen Sie für zwei monoton wachsende stetige Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ die partielle Integrationsformel

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) + \int\limits_a^b g(x)df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Hinweis
Benutzen Sie die Abelsche partielle Summationsformel aus dem Beweis zu Satz 4.22