J. Wengenroth
N. Kenessey
M. Riefer

SS 2010
12.04.2010

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Übungsblatt 1
Abgabe: Dienstag, 20.04.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Tutoriumsaufgaben

Tutorium: Dienstag, 16:00-18:00, HS9
Die Aufgaben T 1 - T 3 werden am 13.04 im Tutorium besprochen.

T 1

Zeigen Sie, dass das Integral I in Definition 6.1.(c) eindeutig ist.

T 2

Seien $a \leq s < t \leq b$. Wir definieren $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ durch $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in]s,t[\\ 0, & x \notin]s,t[\end{cases}$.
Zeigen Sie mit 6.1.(c), dass f Riemann-integrierbar über $[a,b]$ ist mit

$$\int_a^b f(x)dx = t - s.$$

T 3

Berechnen Sie die beiden folgenden Integrale mit Hilfe spezieller Riemann-Summen (also insbesondere ohne den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

(i) $\int_0^1 x dx$ (ii) $\int_0^1 e^x dx$

Übungsaufgaben

Übungen: Dienstag, 10:00-12:00, E45 und Mittwoch, 12:00-14:00, E51
Diese Aufgaben sollen bis Dienstag, den 20.04.2010 10:00 abgegeben werden.

Aufgabe 1

(a) Berechnen Sie $\int_0^1 x^2 dx$ mithilfe spezieller Riemann-Summen.

(b) Zeigen Sie, dass die durch $c_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right)^{1/n}$ definierte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 2

(a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion mit $f|_{[1/n,1]} \in RI(1/n, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar über $[0,1]$ ist und dass

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{1/n}^1 f(x)dx.$$

(b) Zeigen Sie, dass $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \,]0,1] \end{cases}$ eine integrierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ definiert, die keine Regelfunktion ist.

Hinweis
Beweisen Sie für (a) zuerst, dass der Grenzwert existiert. Für eine Partition $\mathscr{P} = \{0 = x_0 < ... < x_m = 1\}$ und das kleinste ℓ mit $x_\ell > 1/n$ schreibe man die Riemann-Summe $R(f, \mathscr{P}, \xi)$ als $\sum\limits_{k=1}^{\ell} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - f(1/n)(x_\ell - 1/n) + f(1/n)(x_\ell - 1/n) + \sum\limits_{k=\ell+1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ und interpretiere den hinteren Teil als neue Riemann-Summe für $f|_{[1/n,1]}$.
Überlegen Sie sich für Teil (b), dass f auf jedem Interval $[0, \delta]$ die Werte 1 und -1 annimmt.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass jede monoton wachsende Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion ist.
Hinweis
Zerlegen Sie das Intervall $[f(a), f(b)]$ in kleine Intervalle $J_1, ..., J_n$ und betrachten Sie für $c_k \in J_k$ die Treppenfunktion $g = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k I_{f^{-1}(J_k)}$. Eine Skizze kann dabei nützlich sein.

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie mit der Linearität des Integrals und speziellen Riemann-Summen, dass $\int\limits_0^{2\pi} p(e^{it})e^{it}dt = 0$ für alle Polynome $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \overline{z}$. Gibt es eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen, die f auf der kompakten Menge $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ gleichmäßig approximiert? Was hat das mit dem Satz von Weierstraß zu tun?