J. Wengenroth Sommersemester 2014
01.07.2014

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Blatt 6

Aufgaben für die Tutorien in der Woche 07. - 11. Juli 2014

T 21
Zeigen Sie für $x \in \,]-1,1[$ mit Hilfe der Binomialreihe

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}.$$

T 22
$A \subseteq \mathbb{C}$ sei offen und *sternförmig* bezüglich $z_0 \in A$, d.h. für alle $z \in A$ hat die Kurve $\gamma_z : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_o + t(z - z_0)$ Werte in A. Zeigen Sie, dass für jede stetig differenzierbare Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

eine Stammfunktion von f definiert ist.

T 23
Seien X, Y, Z normierte Räume (wenn Sie wollen auch $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ und $Z = \mathbb{R}^k$) und $B : X \times Y \to Z$ eine stetige *bilineare* Abbildung, d. h. für alle $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ sind die Abbildungen $x \mapsto B(x, y_0)$ und $y \mapsto B(x_0, y)$ linear. (Das Produkt $X \times Y$ versehen wir mit der Norm $\|(x,y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$.) Zeigen Sie

(a) Es gibt $c \geq 0$, so dass $\|B(x,y)\| \leq c\|x\|\|y\|$ für alle $(x,y) \in X \times Y$,

(b) B ist in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in X \times Y$ differenzierbar mit

$$B'(x_0, y_0)(u, v) = B(x_0, v) + B(u, y_0).$$

T 24
Zeigen Sie, dass die euklidische Norm $e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$ in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung einerseits mit der Kettenregel und der Ableitung von $x \mapsto \|x\|^2$ aus der Vorlesung und andererseits mit Hilfe des Gradienten.

T 25
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } y = x^2 \quad \text{und } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Untersuchen Sie f im Punkt $(0,0)$ auf Stetigkeit, Richtungsdifferenzierbarkeit und Differenzierbarkeit.

Hausaufgaben. Abgabe bis Dienstag, 15.7.14 um 12 Uhr, Übungskasten 5

Am Dienstag, **08.07.14** und am Dienstag, **15.07.14** finden die Übungen in **E 51** statt.

H 26

Bestimmen Sie die Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ der Umkehrfunktion Arsinh des Sinus hyperbolicus.

H 27

(a) Seien $A \subseteq \mathbb{C}$ offen und sternförmig (siehe T 22) bezüglich eines Punkts von A und $g : A \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar ohne Nullstelle. Zeigen Sie, dass es eine stetig differenzierbare Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ gibt mit $g(z) = \exp(f(z))$ für alle $z \in A$.
(Tipp: Was wäre dann die Ableitung von f? Benutzen Sie T 22.)

(b) Zeigen Sie, dass es eine stetig differenzierbare Funktion $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus\,]-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$\mathrm{Log}(x) = \log(x) \text{ für alle } x \in]0, \infty[.$$

H 28

Seien U, X, Y, Z vier normierte Räume, $B : X \times Y \to Z$ bilinear und stetig und $f : U \to X$ und $g : U \to Y$ in $u_0 \in U$ differenzierbar.
Zeigen Sie, dass $h : U \to Z, u \mapsto B(f(u), g(u))$ in u_0 differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung. Was ergibt sich im Fall $U = X = Y = Z = \mathbb{R}$ und $B(x, y) = xy$?

H 29

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Zeigen Sie, dass für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Richtungsableitungen in $(0, 0)$ existieren und berechnen Sie die. Ist f in $(0, 0)$ differenzierbar?

H 30

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0, 0) = 0$ und $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \dfrac{4x^6y^2}{(x^4 + y^2)^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$. Zeigen Sie für jede Richtung $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dass $\varphi(t) = f(tv)$ in $t = 0$ ein lokales Minimum hat (Nicht Ableiten!) aber dass f kein lokales Minimum in $(0, 0)$ hat (dabei hilft $f(x, x^2)$).
Plotten Sie zum Beispiel mit Mathematica den Graphen von f für $(x, y) \in [-1, 1]^2$.