J. Wengenroth

Sommersemester 2014
17.06.2014

# Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
## Blatt 5

**Aufgaben für die Tutorien in der Woche 23. - 27. Juni 2014**

---

**T 16**
Berechnen Sie (für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$) folgende Integrale

(a) $\int\limits_a^b \tan(x)dx$,

(b) $\int\limits_a^b \tan^2(x)dx$,

(c) $\int\limits_1^e \frac{\log(t)}{t}dt$,

(d) $\int\limits_a^b \frac{1}{\sin(x)}dx$ (Tipp: $\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}$ für $\sin(x) > 0$).

**T 17**

(a) Für $t \in ]-\pi, \pi[$ sei $x = \tan(t/2)$. Zeigen Sie

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sin(t) \text{ und } \frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos(t)$$

(b) Finden Sie eine Stammfunktion von $f(t) = \frac{1}{1+\sin(t)}$ auf einem geeigneten Intervall.

**T 18**
Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$R(x) = \frac{x^4}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

sowie Stammfunktionen von $R$ auf $]-\infty, 1[$ und $]1, \infty[$.

**T 19**

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ an $\infty$ integrierbar ist.

(b) Für welche $p \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = \sin(x^p)$ an $\infty$ integrierbar?

(c) Folgt aus der Integrierbarkeit von $f$ an $\infty$, dass $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$?

**T 20**
Für welche $p > 0$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)(\log(\log(n)))^p}?$$

Wie verhält sich die Reihe für $p = 1$?

**Hausaufgaben. Abgabe bis Dienstag, 1.7.14 um 12 Uhr,** **Übungskasten 5**

Am Dienstag, **24.06.14** und am Dienstag, **01.07.14** finden die Übungen in **E 51** statt.

---

**H 21**

Berechnen Sie Stammfunktionen (auf geeigenten Intervallen) folgender Funktionen

(a) $f(x) = \log(x)/x^\beta$ für $\beta \in \mathbb{C}$,

(b) $g(y) = \frac{\sin(y)}{1+\cos(y)}$,

(c) $h(t) = \frac{1}{1+\cos(t)}$,

(d) $i(x) = \frac{\log(\log(x))}{x}$.

**H 22**

(a) Berechnen Sie $\int_0^1 x^n \log(x)^m dx$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

(Tipp: $x^x = \exp(x \log(x))$ und die Exponentialreihe konvergiert auf kompakten Intervallen gleichmäßig, Satz 2.3(a)).

**H 23**

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$R(x) = \frac{(x+1)^5}{(x^2+1)(x-1)^3}$$

(Nur Mut, am Ende kommen angenehme Koeffizienten heraus.)

**H 24**

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$.

(a) Zeigen Sie, dass diese uneigentlichen Integrale existieren.

(b) $I_n = 0$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$.

(c) Finden Sie eine Rekursion für $I_{2n}$.

**H 25**

(a) Zeigen Sie für $f \in C^1([a,b])$, dass die sogenannten Fourier-Koeffizienten $\hat{f}(n) = \int_a^b f(x) e^{-inx} dx$ für $|n| \to \infty$ gegen 0 konvergieren.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage in (a) auch für Treppenfunktionen sowie für Regelfunktionen gilt.