J. Wengenroth Sommersemester 2014
28.05.2014

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Blatt 4

Aufgaben für die Tutorien in der Woche 02. - 06. Juni 2014

T 11
Finden Sie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, so dass für alle $f \in C^3([a,b])$, $x \in [a,b[$ und $h > 0$ (klein genug)

$$\left| \frac{\alpha f(x) + \beta f(x+h) + \gamma f(x+2h)}{h} - f'(x) \right| \leq Ch^2$$

mit einer Konstanten C gilt.

T 12
Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeigen Sie $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. (Potenzreihen sind also Taylor-Reihen.)

T 13
Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ genau dann integrierbar ist, wenn $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ beide integrierbar sind. Dann gelten

$$\mathrm{Re} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))dx \text{ und } \mathrm{Im} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Im} f(x)dx.$$

T 14
Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\int_a^b x^2 e^{\lambda x} dx$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

(b) $\int_a^b x^2 \cos(x) dx$,

(c) $\int_a^b x^m \log(x) dx$ für $m \in \mathbb{Z}$ und $a > 0$,

(d) $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

(e) $\int_a^b \arcsin(x)dx$ für $-1 < a < b < 1$.

T 15
Zeigen Sie die Konvergenz der durch $z_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k\pi/n)$ definierten Folge und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hausaufgaben. Abgabe bis Dienstag 17.6.2014 um 12 Uhr, Übungskasten 5

Am Dienstag, **03.06.14** sind beide Übungsgruppern im Raum **E 51**. Am Dienstag, **17.06.14** finden die Übungen in folgenden Räumen statt:

12 - 14 Uhr: **E 45**, 14 - 16 Uhr: **E 51**.

H 16

Finden Sie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, so dass für alle $f \in C^3([a,b])$, $x \in [a,b[$ und $h > 0$ (klein genug)

$$\left| \frac{\alpha f(x) + \beta f(x+h) + \gamma f(x+2h)}{h^2} - f''(x) \right| \le c\, h$$

mit einer Konstanten c gilt.

H 17

Zeigen Sie, dass das Produkt von zwei Regelfunktionen (also gleichmäßigen Grenzwerten von Treppenfunktionen) wieder eine Regelfunktion ist.

H 18

Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\int\limits_a^b x^2 \sin(x) dx$,

(b) $\int\limits_a^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx) dx$ für $n, m \in \mathbb{N}$,

(c) $\int\limits_a^b x \arctan(x) dx$,

(d) $\int\limits_a^b \exp(\alpha x) \sin(\beta x) dx$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

H 19

Zeigen Sie für $f \in C^{n+1}([a,b])$ und $x_0, x \in [a,b]$ mit $x_0 < x$, dass

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Hinweis. Induktion und partielle Integration.

H 20

Bestimmen Sie für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $f :]-1, \infty[\to \mathbb{C}$, $f(x) = (1+x)^\alpha$ die Taylor-Polynome $T_{f,n,0}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ und zeigen Sie für $x \in [0,1[$, dass

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Bemerkung. Der Binomialkoeffizient $\binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k!$ wurde in Ü5 eingeführt, wo auch die Konvergenz der Reihe für $|x| < 1$ gezeigt wurde. Die Darstellung stimmt übrigens auch für $x \in]-1, 0[$, aber dann ist die Anwendung von H 19 etwas unangenehmer.