J. Wengenroth

Sommersemester 2014
14.05.2014

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Blatt 3

Aufgaben für die Tutorien in der Woche 19. - 24. Mai 2014

T 6
Seien $A \subseteq \mathbb{C}$ konvex, $x_0 \in A$ und $\alpha \in \mathbb{C}$

(a) Finden Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : A \to \mathbb{C}$ mit $f'(x) = \alpha f(x)$ für alle $x \in A$.

(b) Zeigen Sie für jedes $y_0 \in \mathbb{C}$, dass es genau eine differenzierbare Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f'(x) = \alpha f(x) \text{ für alle } x \in A \text{ und } f(x_0) = y_0.$$

T 7
Seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to a+} g(x) = c \in [-\infty, \infty] \setminus \{0\}$. Zeigen Sie anhand der Definition des verallgemeinerten Grenzwerts

$$\lim_{x \to a+} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & ; \quad c > 0 \\ -\infty & ; \quad c < 0. \end{cases}$$

T 8
Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie die gegebenenfalls.

(a) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\log(1+x)}{\cos(x)-1}$,

(b) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1-x^x}{x^p}$ für $p > 0$,

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(1+1/x)^x - e}{1/x}$,

(d) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$,

(e) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$.

T 9
Finden Sie $\min\{x \log(x) : x \in]0, \infty[\}$.

T 10
Sei $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar, so dass $c = \lim\limits_{x \to a+} f'(x)$ existiert.
Zeigen Sie, dass f in a differenzierbar ist mit $f'(a) = c$.

Hausaufgaben. Abgabe bis Dienstag 27.5.2014 um 12 Uhr, Übungskasten 5

Am Dienstag, **20.05.14** finden die Übungen in folgendem Raum statt:

12 - 14 und 14 - 16 Uhr: **E 45**

H 11
Seien $A \subseteq \mathbb{C}$ konvex und $\alpha \in \mathbb{C}$. Finden Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : A \to \mathbb{C}$ mit $f'(x) = \alpha x f(x)$ für alle $x \in A$.

H 12
Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie die gegebenenfalls.

(a) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{x^x - 1}{x \log(x)}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0+} x \log(1 + 1/x)$

(c) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\arctan(x) - x}{x^2 \sin(x)}$

(d) $\lim\limits_{x \to \pi/2-} \left(\tan(x) + \frac{1}{x - \pi/2} \right)$

H 13
Finden Sie $\min\{x^x : x \in]0, \infty[\}$.

H 14
Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0) = e$ und $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ für $x > 0$. Zeigen Sie, dass f in 0 differenzierbar ist, und berechnen Sie $f'(0)$.

H 15
Seien $f, g :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) = x$ und $g(x) = x + x^2 \exp(ix^2)$. Zeigen Sie

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0 \text{ und } \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Was sagt dies über die Regel von l'Hospital?