J. Wengenroth

Sommersemester 2014
29.04.2014

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Blatt 2

Aufgaben für die Tutorien in der Woche 05. - 09. Mai 2014

T 1
Differenzieren Sie folgende Funktionen

(a) $a :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto (x^x)^x$,

(b) $b :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{(x^x)}$,

(c) $c :]-1, 1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$,

(d) $d :]-1, 1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(\arcsin(x)) - \sqrt{1-x^2}$.

T 2
Finden Sie ein möglichst großes Intervall der Form $[0, b]$, so dass $\cos|_{[0,b]}$ bijektiv ist. Die Umkehrfunktion heißt $\arccos : [-1, 1] \to [0, b]$. Untersuchen Sie arccos auf Differenzierbarkeit, und berechnen Sie die Ableitung.

T 3
Zeigen Sie $\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für alle $x \in]-1, 1[$. Welchen Wert vermuten Sie für die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$?

T 4
Finden Sie $\sup\{xe^{-x^2} : x \in \mathbb{R}\}$ und $\inf\{xe^{-x^2} : x \in \mathbb{R}\}$.

T 5
Seien $A \subseteq \mathbb{C}$ konvex und $f : A \to \mathbb{C}$ überall differenzierbar mit beschränkter Ableitung, d.h. es gibt $c \geq 0$ mit $|f'(x)| \leq c$ für alle $x \in A$. Zeigen Sie, dass f *gleichmäßig* stetig ist.
Untersuchen Sie außerdem die Funktion $f :]0, 1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ auf gleichmäßige Stetigkeit und Beschränktheit der Ableitung.

Hausaufgaben. Abgabe bis Dienstag 13.5.2014 um 12 Uhr, Übungskasten 5

Am Dienstag, **06.05.14** und Dienstag, **13.05.14** finden die Übungen in folgenden Räumen statt:

12 - 14 Uhr: **E 51**, 14 - 16 Uhr: **E 51**

H 6

Differenzieren Sie folgende Funktionen

(a) $f :]0, \pi/2[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\tan(x))^x$,

(b) $g :]0, \pi/2[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\tan(x)}$,

(c) $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(\arcsin(x)) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (zeigen Sie $h' = 0$),

(d) $j :]0, \infty[\to \mathbb{C}$, $x \mapsto \cos(i \log(x))$.

H 7

Zeigen Sie, dass $f :]-\pi/2, \pi/2[\to]0, \infty[$, $x \mapsto \exp(\tan(x))$ bijektiv ist mit differenzierbarer Umkehrfunktion. finden Sie eine möglichst einfache Darstellung für $(f^{-1})'(y)$.

H 8

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ auf A differenzierbar und ohne Nullstellen. Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto \log(|f(x)|)$ differenzierbar ist mit Ableitung $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

H 9

Die Funktionen $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ heißen *sinus hyperbolicus* beziehungsweise *cosinus hyperbolicus*. Zeigen Sie

(a) $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$,

(b) $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$,

(c) $\sinh|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt

$$\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

H 10

(a) Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ in a und b differenzierbar.

Zeigen Sie

$$g(a) = \min\{g(x) : x \in [a, b]\} \Rightarrow g'(a) \geq 0 \text{ und}$$
$$g(b) = \min\{g(x) : x \in [a, b]\} \Rightarrow g'(b) \leq 0.$$

(b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$ erfülle $f'(a) < c < f'(b)$. Zeigen Sie, dass es $\xi \in]a, b[$ gibt mit $f'(\xi) = c$.

(Tipp: $g(x) = f(x) - cx$ nimmt auf $[a, b]$ das Minimum an.)