J. Wengenroth Sommersemester 2014
22.04.2014

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher
Blatt 1
Abgabe: Dienstag, 29.04.14, bis 12 Uhr, Übungskasten 5

Am Dienstag, 29.04.14 finden die Übungen in folgenden Räumen statt:

12 - 14 Uhr: **E 51**, 14 - 16 Uhr: **E 45**

H 1
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie die Ableitungen (wobei $n \in \mathbb{N}$).

(a) $a : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \sin(x^n)$,

(b) $b : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto (\sin(x))^n$,

(c) $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k,\ \tilde{c} : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$,

(d) $d : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto e^{x^2} \sin(x)$,

(e) $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \frac{\cos(x)}{\exp(x^2)}$,

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$,

(g) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$,

(h) $h = \exp \circ \exp \circ \exp$.

H 2
Seien $f_1, \dots, f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Zeigen Sie

(a) $\left(\prod_{j=1}^{n} f_j \right)' = \sum_{j=1}^{n} f_j' \prod_{k \neq j} f_k$,

(b) $(f_1 \circ \ldots \circ f_n)' = \prod_{j=1}^{n} f_j' \circ f_{j+1} \circ \ldots \circ f_n$.

H 3
Seien x_0 Häufungspunkt von $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann in x_0 differenzierbar ist, wenn $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ beide in x_0 differenzierbar sind.

(b) Ist f in x_0 differenzierbar, so sind auch $\bar{f}$ und $|f|^2$ in x_0 differenzierbar. Bestimmen Sie die Ableitungen.

(c) In welchen Punkten sind die Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto |z|^2$ differenzierbar?

H 4
Für $z, w \in \mathbb{C}$ schreiben wir $z \perp w$, falls $\mathrm{Re}(z\bar{w}) = 0$.

(a) Zeigen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ und $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dass $z \perp w \iff zu \perp wu$ („Drehinvarianz”) und skizzieren Sie für $z = 1 + 2i$ die Menge $\{w \in \mathbb{C} : z \perp w\}$.

(b) Seien $f : \mathbb{R} \to S^1$ eine in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion, wobei S^1 die Kreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ bezeichnet. Zeigen Sie $f'(x_0) \perp f(x_0)$.

H 5
Sei $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, d. h. $Q(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ mit $a_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass es Polynome $R_1, \ldots, R_n$ vom Grad $n+1$ gibt, so dass auf $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$

$$(1/Q)' = \sum_{j=1}^{n} 1/R_j \text{ gilt.}$$

Bestimmen Sie solche Polynome R_1, R_2 für $Q(z) = 1 + z^2$. (Tipp: Fundamentalsatz der Algebra.)