

Lineare Algebra
Übung 13

Keine Abgabe erforderlich. Besprechung in den Übungen:

Mo, 13.02.2017, 8:30-10:00 Uhr in HS 9

Mi, 15.02.2017, 17:50-19:20 Uhr in HS 9

A 52

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & \pi & e & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & \diagup & \\ & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

A 53

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar. Zeigen Sie:

- (a) Wenn alle Einträge von A reell beziehungsweise rational sind, so sind auch die Einträge von A^{-1} reell beziehungsweise rational.
- (b) Wenn alle Einträge von A ganze Zahlen sind, so sind genau dann alle Einträge in A^{-1} ganzzahlig, wenn $\det(A) \in \{-1, 1\}$ gilt.

Hinweis: Cramersche Regel.

A 54

Es seien $A \in K^{k \times k}$ invertierbar, $B \in K^{m \times m}$, $C \in K^{k \times m}$ und $D \in K^{m \times k}$. Zeigen Sie, dass

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \right) = \det(A) \det(B - DA^{-1}C)$$

A 55

Es sei X ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Für zwei Orthonormalbasen $A = (a_1, \dots, a_n)$ und $B = (b_1, \dots, b_n)$ seien $V_A = a_1^* \wedge \dots \wedge a_n^*$ und $V_B = b_1^* \wedge \dots \wedge b_n^*$ die zugehörigen Volumenformen. Zeigen Sie:

- (a) Es gibt genau ein $S_A^B \in L(X, X)$ mit $S_A^B(a_j) = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ und für diesen Basiswechsel gilt $\det(S_A^B) \in \{-1, 1\}$.
- (b) $V_A = \det(S_A^B) V_B$.