Prof. Dr. Wengenroth
Thorben Schlierkamp

WS 2016/17
20.01.17

Lineare Algebra
Übung 11

Abgabe bis Mo, 30.01.2017, 8:30 Uhr in Übungskasten E19
oder zu Beginn der ersten Übung. Besprechung in den Übungen:
Mo, 30.01.2017, 8:30-10:00 Uhr in HS 9
Mi, 01.02.2017, 17:50-19:20 Uhr in HS 9

A 44 (4 Punkte)
Es sei $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$. Berechnen Sie S^* und untersuchen Sie, welche der Aussagen (1) bis (8) aus Satz 4.10 für S erfüllt sind.

A 45 (4 Punkte)
Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $a_1, ..., a_n$. Zeigen Sie, dass es genau ein Skalarprodukt auf X gibt bezüglich dem $a_1, ..., a_n$ eine Orthonormalbasis bilden.

A 46 (7 Punkte)
Für ein reelles Polynom der Form $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ ist $\int\limits_0^1 p(x)\, dx = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}$. (Das ist das Riemann-Integral, das Sie womöglich aus der Schule kennen; andernfalls definieren Sie die linke Seite durch die rechte Seite.) Benutzen Sie im Folgenden, dass das Integral eines positiven Polynoms auf $[0, 1]$ positiv ist und genau dann 0 ist, wenn das Nullpolynom integriert wird.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle p, q\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)dx$ ein Skalarprodukt auf dem Raum aller Polynome P definiert, d.h. p und q können einen verschiedenen Grad haben.
Tipp: Überlegen Sie sich zunächst die Linearität des Integrals.

(b) Zeigen Sie, dass $f : P \to \mathbb{R}, p \mapsto p(1)$ eine lineare Abbildung ist, die keine Darstellung $f(p) = \langle q, p\rangle$ für ein $q \in P$ besitzt.
Tipp: Setzen Sie für p die Monome x^m ein und betrachten Sie dann $m \to \infty$.

(c) Finden Sie darstellende Elemente q_n für die Restriktion $f|_{P_n}$ von f aus (b) auf dem Raum P_n der Polynome vom Grad kleiner gleich n für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.
(Beachten Sie, dass im Rieszschen Darstellungssatz q darstellend für $f \in X'$ ist, falls $\langle q, x\rangle = f(x)$ für alle Elemente x einer Basis von X gilt.)
Die vorkommenden LGS müssen nicht per Hand gelöst werden.

A 47 (5 Punkte + 4 Bonuspunkte)
Bestimmen Sie eine Parabel p (also ein Polynom $p(t)$ vom Grad 2), so dass für die Daten $t_i = j$ und $y_j = j^2 + (-1)^j \sqrt{j}$ mit $j \in \{1, ..., 6\}$ die Summe $\sum\limits_{j=1}^{n} |p(t_j) - y_j|^2$ minimal ist.
Die Normalengleichung muss nicht per Hand gelöst werden.
Fertigen Sie einen Plot der Daten zusammen mit der Parabel an mithilfe eines Programms Ihrer Wahl (z.B. Octave, Geogebra, etc.) um die Bonuspunkte zu erhalten.