Prof. Dr. J. Wengenroth
Thorben Schlierkamp

WS 2016/17
13.01.2017

Lineare Algebra
Übung 10

Abgabe bis Mo, 23.01.2017, 8:30 Uhr in Übungskasten E19
oder zu Beginn der ersten Übung. Besprechung in den Übungen:
Mo, 23.01.2017, 8:30-10:00 Uhr in HS 9
Mi, 25.01.2017, 17:50-19:20 Uhr in HS 9

A 39 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dass $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A^TA)$ gilt und dass A^TA genau dann invertierbar ist, wenn $\operatorname{Rang}(A) = n$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto A^Ty$ ein Monomorphismus ist.

(b) Stimmt die Aussage auch für $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$? Was muss man gegebenenfalls ändern, damit sie stimmt?

A 40 (3 Punkte)
Seien X und Y $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Skalarprodukten $\langle x_1, x_2\rangle_X$ beziehungsweise $\langle y_1, y_2\rangle_Y$ und zugehörigen Normen $\|x\|_X$ beziehungsweise $\|y\|_Y$. Zeigen Sie:

(a) Durch $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle_X + \langle y_1, y_2\rangle_Y$ ist ein Skalarprodukt auf $X \times Y$ definiert.

(b) Für die zugehörige Norm gilt $\|(x, y)\|^2 = \|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2$.

(c) Ausgehend von Orthonormalbasen A und B von X beziehungsweise Y konstruiere man eine Orthonormalbasis von $X \times Y$.

A 41 (4 Punkte)
Zeigen Sie für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum X mit Skalarprodukt und zugehöriger Norm $\|x\|$, dass für alle $x, y \in X$ folgende Identität gilt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Gibt es auf $\mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt, so dass die zugehörige Norm $\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\| = |a| + |b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ erfüllt?

A 42 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Orthonormalisierungsverfahren von Gram und Schmidt aus Satz 4.4 von der Reihenfolge der Vektoren abhängt, indem Sie in $\mathbb{R}^3$ einerseits $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und andererseits $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ orthonormalisieren.

A 42 (5 Punkte)
Berechnen Sie gemäß dem Verfahren im Beweis von 4.5 (b) eine reduzierte QR-Zerlegung von

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Beachten Sie: Unter 10_QR-Zerlegung im Übungsordner finden Sie einen ausführlichen Abschnitt zur reduzierten QR-Zerlegung.