Prof. Dr. Wengenroth
Thorben Schlierkamp

WS 2016/17
22.12.16

Lineare Algebra
Übung 9

Abgabe bis Mo, 16.01.2017, 8:30 Uhr in Übungskasten E19
oder zu Beginn der ersten Übung. Besprechung in den Übungen:
Mo, 16.01.2017, 8:30-10:00 Uhr in HS 9
Mi, 18.01.2017, 17:50-19:20 Uhr in HS 9

A 35 (4 Punkte)
Es seien X, Y und Z drei K-Vektorräume. Zeigen Sie für $f \in L(X,Y)$ und $g \in L(Y,Z)$:

(a) $\operatorname{Rang}(g \circ f) \leq \min\{\operatorname{Rang}(g), \operatorname{Rang}(f)\}$;

(b) $\operatorname{Rang}(g \circ f) = \operatorname{Rang}(f)$, falls g ein Monomorphismus ist;

(c) $\operatorname{Rang}(g \circ f) = \operatorname{Rang}(g)$, falls f ein Epimorphismus ist.

A 36 (8 Punkte)
Es sei $R \in K^{m\times n}$ in Zeilenstufenform und r bezeichne die Anzahl der Zeilen in R, die keine Nullzeilen sind. Zeigen Sie:

(a) $\{Rx : x \in K^n\} = \{y \in K^m : y_j = 0 \text{ für alle } j = r+1, ..., m\}$;
(Für „ $\supseteq$ “ überlege man sich (z.B. induktiv), dass es r Spalten $S_1, ..., S_r$ von R gibt von der Form $S_j = [S_{j,1}, \cdots S_{j,j}, \ \ 0, \ \ \cdots \ \ 0]^{\mathrm{T}}$ mit $S_{j,j} \neq 0$)

(b) $\operatorname{Rang}(R) = r$;

(c) Für $A \in K^{m\times n}$ mit einer LR-Zerlegung $PA = LR$ gilt:
$\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(R)$.

(d) Berechnen Sie den Rang von $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

A 37 (4 Punkte)
Die Menge P_n der Polynome (mit Koeffizienten in $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) vom Grad kleiner gleich $n \in \mathbb{N}_0$ sei versehen mit der Monomobasis $E_n = \{e_0 = x^0, ..., e_n = x^n\}$.
Für $n \in \mathbb{N}$ seien $D_n : P_n \to P_{n-1}$ und $I_n : P_{n-1} \to P_n$ definiert durch:

$$D_n\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k x^{k-1} \ \text{ und } I_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $M_{E_n}^{E_{n-1}}(D_n) \in K^{n\times(n+1)}$,
$M_{E_{n-1}}^{E_n}(I_n) \in K^{(n+1)\times n}$ und $M_{E_{n-1}}^{E_{n-1}}(D_n \circ I_n) \in K^{n\times n}$ sowie den Rang von I_n.

A 38 (4 Punkte)
Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Für verschiedene $x_0, ..., x_n \in K$ und $N = \{0, 1, ..., n\}$ sei $\ell_k : K \to K$ definiert durch $\ell_k(x) = \prod_{j\in N\setminus\{k\}} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$ für $k \in N$.

(a) Zeigen Sie, dass $L = \{\ell_0, ..., \ell_n\}$ eine Basis von P_n bildet.
(Tipp: Was ist $f(\ell_k)$ für $f : P_n \to K^{n+1}$, $p \mapsto [p(x_0), ..., p(x_n)]^{\mathrm{T}}$ aus 3.17 (d)?)

(b) Bestimmen Sie die Koeffizientenfunktionale ℓ_k^* für alle $k \in N$.

(c) Bestimmen Sie für die Monombasis $E = \{e_0 = x^0, ..., e_n = x^n\}$ und die sogenannte *Lagrange-Basis* L die Basiswechselmatrix $W_E^L \in K^{(n+1)\times(n+1)}$.