J. Wengenroth
T. Schlierkamp

WS 17/18
18.12.2017

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 9

Abgabe: Dienstag, 09.01.2018 bis 10:15 Uhr, Übungskasten 19
Besprechung in den Übungen:
Di. 09.01.2018, 10:15-11:45 Uhr oder 14:15-15:45 Uhr in E52.

Aufgabe 34

(a) Gesucht ist $\Phi \in \mathbb{R}$, so dass die geometrische Folge $x_n = \Phi^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ die folgende Eigenschaft besitzt:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \qquad (*)$$

Bestimmen Sie beide Lösungen Φ_1 und Φ_2 mit $\Phi_1 < \Phi_2$. Zeigen Sie ferner, dass auch Linearkombinationen $\alpha a_n + \beta b_n$ der Folgen $a_n = \Phi_1^n$ und $b_n = \Phi_2^n$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Bedingung $(*)$ erfüllen.

(b) Wir definieren die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n \in N_0}$ rekursiv durch

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad \text{wobei } f_0 = 0, \ f_1 = 1.$$

Leiten Sie eine explizite Formel her, indem Sie f_n als Linearkombination von a_n und b_n darstellen. (Also $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gesucht, so dass $f_n = \alpha a_n + \beta b_n$.)

(c) Zeigen Sie, dass das Verhältnis aufeinanderfolgender Fibonacci Zahlen $q_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ gegen Φ_2 konvergiert.

Aufgabe 35

Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{3^n}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{3^n}$ (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{2^{n^2}}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Aufgabe 36

(a) Es sei $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $q_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ gegen $c \in [0, \infty[$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann $w_n = \sqrt[n]{x_n}$ auch gegen c konvergiert.

Hinweis: $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k-1}}$ mit $x_0 = 1$. Zeigen Sie damit für $c > 0$, dass es für alle $\varepsilon > 0$ Konstanten $K_1, K_2 > 0$ gibt mit $K_1 c^n (1-\varepsilon)^n \leq x_n \leq K_2 c^n (1+\varepsilon)^n$.

(b) Zeigen Sie, dass $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ konvergiert.

Aufgabe 37

Entwickeln Sie $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ in eine Potenzreihe um $-\frac{1}{2}$, d.h. finden Sie $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, so dass $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z + \frac{1}{2})^n$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe um $-\frac{1}{2}$.

Hinweis: $\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} \dfrac{1}{1 - \frac{b}{a}}$ für $a \neq 0$ und geometrische Reihe.

Aufgabe 38

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,\infty[^{\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge, so dass $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(b) Untersuchen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 39 (Weihnachtsaufgabe)
Frau Holle ist verzweifelt, weil Sie das Rezept für Schneeflocken verloren hat. Rentier Rudi versucht sie mit folgendem Vorschlag zu trösten:
Man beginne mit einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a und setze auf die Mitte jeder Seite ein kleineres gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $a/3$. Dadurch erhält man eine Figur mit 12 Seiten auf deren Mitten man wiederum kleine gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge $a/3^2 = a/9$ setze. Macht man so weiter, erhält man eine Figur, die wie eine schöne Schneeflocke aussieht.
Frau Holle ist begeistert, aber ihr stellen sich einige Fragen:

(a) Wie groß ist der Umfang x_n der Figur nach n solchen Schritten?
Leiten Sie eine explizite Darstellung für x_n her.

(b) Wie groß ist der Flächeninhalt y_n?
Leiten Sie eine explizite Darstellung für y_n her.
Tipp: $y_{n+1} = y_0 + \sum_{k=0}^{n} y_{k+1} - y_k$

(c) Konvergieren die betrachteten Folgen x_n, y_n?

Helfen Sie Frau Holle und skizzieren Sie einige der entstehenden Figuren.