Prof. Dr. Wengenroth
Thorben Schlierkamp

WS 2016/17
16.12.16

# Lineare Algebra
# Übung 8

Abgabe bis Mo, 09.01.2017, 8:30 Uhr in Übungskasten E19
oder zu Beginn der ersten Übung. Besprechung in den Übungen:
Mo, 09.01.2017, 8:30-10:00 Uhr in HS 9
Mi, 11.01.2017, 17:50-19:20 Uhr in HS 9

---

**A 31** (4 Punkte)
Es sei $a_1, ..., a_n \in K^n$ eine Basis des $K^n$. Zeigen Sie, dass $A = [a_1 \quad \cdots \quad a_n] \in K^{n\times n}$ invertierbar ist und für alle $x \in K^n$ gilt:

$$\begin{bmatrix} a_1^*(x) \\ \vdots \\ a_n^*(x) \end{bmatrix} = A^{-1}x$$

sowie $a_j^*(x) = b_j x$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$, wobei $b_j$ die $j$-te Zeile von $A^{-1}$ bezeichnet.

**A 32** (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie zur Basis $a_1 = [2, \quad 1]^{\mathrm{T}}$, $a_2 = [1, \quad 3]^{\mathrm{T}}$ des $\mathbb{R}^2$ die Koeffizientenfunktionale $a_1^*$ und $a_2^*$.

(b) Berechnen Sie zur Basis $b_1 = [1, \quad 1, \quad 1]^{\mathrm{T}}$, $b_2 = [1, \quad 1, \quad 0]^{\mathrm{T}}$, $b_3 = [1, \quad 0, \quad 1]^{\mathrm{T}}$ des $\mathbb{R}^3$ die Koeffizientenfunktionale $b_1^*$, $b_2^*$ und $b_3^*$.

**A 33** (7 Punkte)
Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum (und schreiben zur Betonung $\mathbb{Q}$-linear etc.).

(a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann $\mathbb{Q}$-linear ist, wenn $f(x+y) = f(x)+f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie: 1 und $\sqrt{2}$ sind $\mathbb{Q}$-linear unabhängig.

(c) Wegen 3.11 kann man $\{1, \sqrt{2}\}$ zu einer Basis ergänzen. Ist das Koeffizientenfunktional $f = 1^*$ von der Form $f(x) = \alpha x$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$?

**A 34** (3 Punkte)
Die Abbildung $D : P_n \to P_n$, $D\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\, a_k x^{k-1}$ ist eine lineare Abbildung auf dem Raum $P_n$ der Polynomfunktionen vom Grad kleiner gleich $n \in \mathbb{N}$.
Berechnen Sie $\dim(\mathrm{Kern}(D))$ und $\dim(\mathrm{Bild}(D))$.

**Weihnachtsbonusaufgabe** (4 Bonuspunkte)
Die Rentiere des Weihnachtsmanns sind alt geworden und sollen jetzt durch einen modernen Düsenantrieb, der starr auf dem Schlitten montiert wird, ersetzt werden.

(a) Es gibt *Doppelturbinen*, die in eine Richtung und die ihr entgegengesetze Richtung antreiben können. Wie viele davon braucht der Schlitten mindestens, damit der Weihnachtsmann jeden Ort im $\mathbb{R}^3$ ansteuern kann und wie müssen sie angebracht werden?

(b) Die Doppelturbinen sind sehr teuer, weshalb der Weihnachtsmann erwägt billigere *Einfachturbinen* anzuschaffen. Wie viele braucht er davon um an jeden Ort zu kommen und wie sollten sie am Schlitten angebracht werden?