

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 8

Abgabe: Dienstag, 19.12.2017 bis 10:15 Uhr, Übungskasten 19

Besprechung in den Übungen:

Di. 19.12.2017, 10:15-11:45 Uhr oder 14:15-15:45 Uhr in E52.

Aufgabe 30

- (a) Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \leq y_n \leq z_n$ und $x_\infty \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
 $x_n \rightarrow x_\infty$ und $z_n \rightarrow x_\infty \Rightarrow y_n \rightarrow x_\infty$.
- (b) Zeigen Sie für ein Polynom $p \neq 0$ mit positiven Koeffizienten, dass $\sqrt[n]{p(n)} \rightarrow 1$ gilt.

Aufgabe 31

- (a) Zeigen Sie, dass $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ gegen 0 konvergiert und untersuchen Sie $\sqrt{n}a_n$ auf Konvergenz.
- (b) Zeigen Sie, dass $b_n = \sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}$ gegen 0 für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ konvergiert.
- (c) Für welche $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ konvergiert $n^\alpha b_n$?

Hinweis: $a - b = (\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{b}) \sum_{j=0}^{k-1} a^{j/k} b^{(k-1-j)/k}$.

Aufgabe 32

Für $a > 0$ und $0 < x_0 < \frac{2}{a}$ sei $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Betrachten Sie $(x_n - \frac{1}{a})^2$, um $x_n < \frac{1}{a}$ zu zeigen.

Aufgabe 33

Es sei $c \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n}$; (b) $b_n = \frac{(n+1)^3 - n^3 - cn^2}{n}$;

(c) $c_n = \frac{c^n}{n!}$ Tipp: $\frac{|c|}{n} \leq \frac{1}{2}$ für $n \geq n_0 \geq 2|c|$ mit $n_0 \in \mathbb{N}$;

(d) $d_n = \frac{n^p c^n}{n!}$ Tipp: $d_n = \frac{c^{n-p}}{(n-p)!} \cdot \frac{c^p n^p (n-p)!}{n!} = c_{n-p} \prod_{k=0}^{p-1} \frac{c n}{n-k}$;

(e) $e_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$; (f) $f_n = (1 + \frac{1}{n^2})^n$.