Prof. Dr. Wengenroth WS 2016/17
Thorben Schlierkamp 08.12.16

Lineare Algebra
Übung 7

Abgabe bis Mo, 19.12.16, 8:30 Uhr in Übungskasten E19
oder zu Beginn der ersten Übung. Besprechung in den Übungen:
Mo, 19.12.2016, 8:30-10:00 Uhr in HS 9
Mi, 21.12.2016, 17:50-19:20 Uhr in HS 9

A 27 (Punkte)

(a) Für $n, \ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell < n$ sei $A \in K^{n\times n}$ von der Form $A = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right]$,
wobei $B \in K^{\ell\times\ell}$, $C \in K^{\ell\times(n-\ell)}$, $0 \in K^{(n-\ell)\times\ell}$ (Nullmatrix) und $D \in K^{(n-\ell)\times(n-\ell)}$. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn B und D invertierbar sind. Geben Sie in dem Fall die Inverse A^{-1} in einer solchen Blockform an.

(b) Invertieren Sie $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

A 28 (Punkte)

Es sei X ein K-Vektorraum. Zeigen Sie für Teilräume $L, M \sqsubseteq X$:

(a) $L \cap M$ ist ein Teilraum von X;

(b) $L \cup M$ ist ein Teilraum von X genau dann, wenn $L \subseteq M$ oder $M \subseteq L$;

(c) $L + M = \{x + y : x \in L \text{ und } y \in M\}$ ist ein Teilraum von X ;

(d) $L + M = \operatorname{span}(L \cup M)$. (Siehe 3.6)

(e) Gilt im Allgemeinen $\operatorname{span}(A \cap B) = \operatorname{span}(A) \cap \operatorname{span}(B)$ für $A, B \subseteq X$?

A 29 (Punkte)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert durch $f_n(k) = \begin{cases} 1, \text{ falls } k \geq n \\ 0, \text{ falls } k < n \end{cases}$.

Zeigen Sie, dass $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine linear unabhängige Familie ist und berechnen Sie die lineare Hülle $\operatorname{span}(\{f_n : n \in \mathbb{N}\})$ in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

A 30 (Punkte)

Es seien X, Y K-Vektorräume. Dann ist $X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ und } y \in Y\}$ versehen mit der Addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ und der Multiplikation $\alpha\,(x, y) = (\alpha\, x, \alpha\, y)$ ebenfalls ein K-Vektorraum.
Zeigen Sie für jeden K-Vektorraum Z die Bijektivität der beiden Abbildungen

(a) $\Phi : L(Z, X \times Y) \to L(Z, X) \times L(Z, Y),\ T \mapsto (\pi_X \circ T, \pi_Y \circ T)$ und

(b) $\Psi : L(X \times Y, Z) \to L(X, Z) \times L(Y, Z),\ T \mapsto (T \circ i_X, T \circ i_Y)$,

wobei $\pi_X : X \times Y \to X,\ (x, y) \mapsto x,\quad \pi_Y : X \times Y \to Y,\ (x, y) \mapsto y$
und $i_X : X \to X \times Y,\ x \mapsto (x, 0),\quad i_Y : Y \to X \times Y,\ y \mapsto (0, y)$.