

**Einführung in die Mathematik**  
**Übungsblatt 7**

Abgabe: Dienstag, 12.12.2017 bis 10:15 Uhr, Übungskasten 19

Besprechung in den Übungen:

Di. 12.12.2017, 10:15-11:45 Uhr oder 14:15-15:45 Uhr in E52.

**Aufgabe 26**

- (a) Für  $z \in \mathbb{C}$  seien  $a = \sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2}}$  und  $b = \sqrt{\frac{|z| - \operatorname{Re}(z)}{2}}$ . Berechnen Sie  $(a + ib)^2$  sowie  $(a - ib)^2$  und folgern Sie, dass es für jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  genau 2 Wurzeln in  $\mathbb{C}$  gibt (also ein  $w \in \mathbb{C}$  mit  $w^2 = (-w)^2 = z$ ).
- (b) Zeigen Sie, dass sich jedes quadratische Polynom  $p(z) = az^2 + bz + c$  mit  $a, b, c \in \mathbb{C}$  und  $a \neq 0$  als  $p(z) = a(z - w_0)(z - w_1)$  für gewisse  $w_0, w_1 \in \mathbb{C}$  schreiben lässt.

**Aufgabe 27**

- (a) Bestimmen Sie alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^3 = 1$  und skizzieren Sie die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene.
- (b) Bestimmen Sie alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^2 \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 28**

Es seien  $a_k, b_k \in \mathbb{C}$  mit  $|a_k| \leq 1$  und  $|b_k| \leq 1$  für  $k = 1, \dots, n$ .

Zeigen Sie durch Induktion, dass  $\left| \prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|$ .

Folgern Sie damit erneut für  $0 \leq s < t$ , dass  $t^n - s^n \leq nt^{n-1}(t - s)$

**Hinweis:**  $\alpha a - \beta b = \alpha(a - b) + b(\alpha - \beta)$ .

**Aufgabe 29**

- (a) Für  $z, w \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq w$  sei  $G_{z,w} = \{z + t(w - z) : t \in \mathbb{R}\}$  die Gerade durch  $z$  und  $w$ . Charakterisieren Sie, wann  $G_{z,w} \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$  ist. Skizzieren Sie dies in der Gaußschen Zahlenebene.
- (b) Sei  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  und sei  $\varphi : S^1 \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{R}$  so definiert, dass  $\varphi(z)$  der Schnittpunkt von  $G_{i,z}$  mit  $\mathbb{R}$  ist. Zeigen Sie, dass  $\varphi$  bijektiv ist und berechnen Sie die Umkehrfunktion.