

Lineare Algebra
Übung 6

Abgabe bis Mo, 12.12.16, 8:30 Uhr in Übungskasten E19
oder zu Beginn der ersten Übung. Besprechung in den Übungen:

Mo, 12.12.2016, 8:30-10:00 Uhr in HS 9

Mi, 14.12.2016, 17:50-19:20 Uhr in HS 9

A 22 (2 Punkte)

(a) Hat die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ eine Darstellung $A = LR$ mit einer linken Dreiecksmatrix L beziehungsweise einer rechten Dreiecksmatrix R ?

(b) Berechnen Sie eine LR-Zerlegung gemäß Satz 2.8 und geben Sie die drei Matrizen L , R und P an.

A 23 (4 Punkte)

(a) Finden Sie für die nachstehende Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ eine LR-Zerlegung und geben Sie die Matrizen L , R und P an. Kontrollieren Sie Ihre Berechnungen, indem Sie $PA = LR$ überprüfen.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie mithilfe der LR-Zerlegung eine Lösung $x \in \mathbb{R}^5$ für das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = [2 \ 3 \ 0 \ 4]^T$.

A 24 (5 Punkte)

Sei $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, d.h. $D_{j,k} = 0$ für $j \neq k$ und $D_{j,j} = \lambda_j$.

(a) Was bewirken die Multiplikationen AD beziehungsweise DA für ein $A \in K^{n \times n}$?

(b) Welche Diagonalmatrizen D erfüllen $DA = AD$ für alle $A \in K^{n \times n}$?

(c) Wann ist D invertierbar und wie sieht in dem Fall die Inverse aus?

A 25 (5 Punkte)

Es sei $R \in K^{n \times n}$ in Zeilenstufenform, also insbesondere eine rechte Dreiecksmatrix. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Für jedes $c \in K^n$ ist $Rx = c$ lösbar.

(ii) $R_{j,j} \neq 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

(iii) R ist invertierbar.

Zeigen Sie auch, dass in diesem Fall R^{-1} eine rechte Dreiecksmatrix ist.

Hinweis: Ringschluss (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Durch Transponieren erhält man **A 21** auch für rechte Dreiecksmatrizen, nutzen Sie dies für (ii) $\Rightarrow$ (iii) in Verbindung mit **A 24**.

A 26 (4 Punkte)

Es sei $A \in K^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix, so dass $L_1 R_1 = A = L_2 R_2$ mit LR-Zerlegungen L_i, R_i aus Satz 2.8.

Zeigen Sie, dass dann $L_1 = L_2$ und $R_1 = R_2$ gilt.

Hinweis: Nutzen Sie **A 21** (c) um die Invertierbarkeit der L_i zu zeigen. Warum sind die Inversen wieder linke Dreiecksmatrizen? Folgern Sie die Invertierbarkeit der R_i und weisen Sie nun $R_1(R_2)^{-1} = (L_1)^{-1}L_2 = E_{n \times n}$ nach.