J. Wengenroth
T. Schlierkamp

WS 17/18
27.11.2017

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 6

Abgabe: Dienstag, 05.12.2017 bis 10:15 Uhr, Übungskasten 19
Besprechung in den Übungen:
Di. 05.12.2017, 10:15-11:45 Uhr oder 14:15-15:45 Uhr in E52.

Aufgabe 22

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}\, b : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Teilkörper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist, d.h. Summen, Produkte und multiplikative Inverse von Elementen aus $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sind wieder in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

(b) Gilt $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$?

(c) Wie könnte man $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ definieren ohne $\mathbb{R}$ zu benutzen?
Hinweis: $\varphi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}^2$, $a + \sqrt{2}b \mapsto (a, b)$ ist bijektiv. Definieren Sie mittels φ eine Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Q}^2$.

Aufgabe 23

(a) Zeigen Sie $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \geq -1$.

(b) Was ist ein „gerechter" Tageszins bei einem Jahreszins von r %? Was erhält man für r=5% für einen Tageszins? Was hat das mit (a) zu tun?

Aufgabe 24

Zeigen Sie für eine Indexmenge I und Mengen $A_i \subseteq \mathbb{R}$ für $i \in I$:

(a) Falls $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ nach oben beschränkt ist, gilt

$$\sup\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sup\{\sup A_i : i \in I\}.$$

(b) Falls $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ ist, gilt $\sup\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \leq \inf\{\sup A_i : i \in I\}$.

(c) Falls $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist, gilt $\sup A = -\inf(-A)$, wobei $-A = \{-a : a \in A\}$.

Aufgabe 25

Zeigen Sie für $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, dass es eine Zahl $e \in \mathbb{R}_+$ gibt mit $a_n \leq e \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Intervallschachtelung, dazu $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ und $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$ mithilfe A23 (a) abschätzen.