Prof. Dr. Wengenroth — WS 2016/17
Thorben Schlierkamp — 25.12.16

Lineare Algebra
Übung 5

Abgabe bis Mo, 05.12.16, 8:30 Uhr in Übungskasten E19
oder zu Beginn der ersten Übung. Besprechung in den Übungen:
Mo, 05.12.2016, 8:30-10:00 Uhr in HS 9
Mi, 07.12.2016, 17:50-19:20 Uhr in HS 9

A 18 (5 Punkte)
Einige der nachstehenden Abbildungen sind linear, andere nicht. Geben Sie jeweils im Fall der Linearität die darstellende Matrix an und zeigen Sie andernfalls die Nichtlinearität der Abbildung:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2(y-z) \\ x+3z \end{bmatrix}$;

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} xy+1 \\ x-2y \end{bmatrix}$;

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \begin{bmatrix} x^2 \\ 4x \end{bmatrix}$;

(d) $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$;

(e) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto x$.

A 19 (4 Punkte)
Für eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ sei die sogenannte *transponierte Matrix* $A^T \in K^{n\times m}$ definiert durch $A^T = [A^T_{j,k}] = [A_{k,j}]$, d.h. Zeilen und Spaltenindizes werden vertauscht. Zeigen Sie:

(a) $(A+B)^T = A^T + B^T$ für $B \in K^{m\times n}$.

(b) $(AC)^T = C^T A^T$ für $C \in K^{n\times \ell}$.

(c) Falls $A \in K^{n\times n}$ invertierbar ist, so ist es auch A^T und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

A 20 (6 Punkte)
Invertieren Sie die folgenden Matrizen mithilfe des Gauß-Algorithmus:

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 6 & 10 & 20 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

(b) $B_t = \begin{bmatrix} \frac{3}{t^2+1} & 3 \\ 1 & 2(t^2+1) \end{bmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

(c) Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mithilfe der Inversen:

$Ax = b_i$ für $i = 1,2$ und $B_t y = c$, wobei $b_1 = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -18 \\ -12 \end{bmatrix}$ und $c = \begin{bmatrix} 6 \\ t^2+1 \end{bmatrix}$.

A 21 (5 Punkte + 3 Bonuspunkte)

(a) Zeigen Sie für linke Dreiecksmatrizen $L, M \in K^{n\times n}$, dass $L+M$ und LM wieder linke Dreiecksmatrizen sind.

(b) Es sei $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine linke Dreiecksmatrix mit nur Nullen in der Diagonale. Zeigen Sie, dass L nilpotent ist, d.h. es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $L^m = 0$ (Nullmatrix).
Verallgemeinern Sie dies für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ an der Stelle von 3.

(c) Es sei $A \in K^{n\times n}$ nilpotent. Zeigen Sie, dass $E - A$ invertierbar ist mit Inverser $(E-A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$, wobei $E \in K^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.