

**Einführung in die Mathematik**  
**Übungsblatt 5**

Abgabe: Dienstag, 28.11.2017 bis 10:15 Uhr, Übungskasten 19

Besprechung in den Übungen:

Di. 28.11.2017, 10:15-11:45 Uhr oder 14:15-15:45 Uhr in E52.

---

**Aufgabe 17**

An der Universität haben die drei Fächer  $F_1, F_2, F_3$  genau 212, 346 beziehungsweise 311 Studenten. 92 belegen die Fächer  $F_1$  und  $F_2$ , 117 studieren  $F_1$  und  $F_3$  sowie 123 sowohl  $F_2$  als auch  $F_3$ . Manche Studenten belegen auch alle drei Fächer.

Wie viele Studenten belegen höchstens zwei der drei Fächer?

Beweisen Sie ihre Antwort.

**Aufgabe 18**

Es seien  $A, B \subseteq \mathbb{Q}_+$ , so dass die Suprema der Mengen existieren. Zeigen Sie, dass dann auch  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$  ein Supremum besitzt und  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$  gilt.

**Aufgabe 19**

Wir versehen  $\mathbb{Q}_+^2$  mit der lexikographischen Ordnung  $\preceq$ , d.h.  $(a, b) \preceq (x, y)$ , falls  $a < x$  oder  $(a = x$  und  $b \leq y)$ .

- Skizzieren Sie die Mengen  $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q}_+^2 : (x, y) \preceq (1, 3)\}$  und  $B = \{(x, y) \in \mathbb{Q}_+^2 : (x, y) \succeq (1, 3)\}$ .
- Zeigen Sie, dass für nichtleere  $A, B \subseteq \mathbb{Q}_+$  die Menge  $A \times B$  genau dann in  $(\mathbb{Q}_+^2, \preceq)$  beschränkt ist, wenn  $A$  in  $\mathbb{Q}_+$  beschränkt ist.
- Zeigen Sie, dass  $A \times B$  ein Supremum besitzt, wenn (1)  $A \subseteq \mathbb{Q}_+$  ein Supremum besitzt, das kein Maximum ist, und  $B \subseteq \mathbb{Q}_+$  nicht leer ist oder (2) wenn beide Mengen ein Supremum besitzen.

**Aufgabe 20**

- Es sei  $A \subseteq X$  mit einer beliebigen Menge  $X$ . Zeigen Sie, dass durch  $x \sim y$ , falls  $x = y$  oder  $x, y \in A$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$  definiert ist. Bestimmen Sie außerdem die Äquivalenzklassen.
- Für Abbildungen  $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow Y$  schreiben wir  $f \approx g$ , falls die Menge  $\{x \in \mathbb{N}_0 : f(x) \neq g(x)\}$  endlich ist. Zeigen Sie, dass  $\approx$  eine Äquivalenzrelation auf  $Y^{\mathbb{N}_0}$  definiert.

**Aufgabe 21**

Ist das Verhältnis der Seitenlängen eines DIN A4-Blatts rational? (Was ist das besondere an einem DIN A Blatt?)

Kann man ein Quadrat aus DIN A4-Blättern legen ohne Blätter übereinander zu legen? Beweisen Sie ihre Antwort.