Prof. Dr. Wengenroth
Thorben Schlierkamp WS 2016/17
18.11.16

Lineare Algebra
Übung 4

Abgabe bis Mo, 28.11.16, 8:30 Uhr in Übungskasten E19
oder zu Beginn der ersten Übung. Besprechung in den Übungen:
Mo, 28.11.2016, 8:30-10:00 Uhr in HS 9
Mi, 30.11.2016, 17:50-19:20 Uhr in HS 9

A 13 (7 Punkte + 3 Bonuspunkte)
Für einen Ring $(R, +, \cdot)$ versehen wir $R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$ mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$, definiert durch

$$(x, y, z) \oplus (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c) \quad \text{und} \quad (x, y, z) \odot (a, b, c) = (xa, xb + yc, zc).$$

Zeigen Sie, dass $(R^3, \oplus, \odot)$ ein Ring ist. Ist die Multiplikation $\odot$ kommutativ?
Bonus: Zeigen Sie, dass $(x, y, z) \in R^3$ bzgl. $\odot$ genau dann invertierbar ist, wenn $x, z \in R$ bzgl $\cdot$ invertierbar sind.

A 14 (8 Punkte)
Wir versehen $\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}$ mit den Verknüpfungen $\boxplus$ und $\boxdot$, definiert durch

$$(x, y) \boxplus (a, b) = (x + a, y + b) \qquad \text{und} \qquad (x, y) \boxdot (a, b) = (xa + 2yb, xb + ya).$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}^2, \boxplus, \boxdot)$ ein Körper ist.
(Sie dürfen auf die Assoziativität von $\boxplus$ und $\boxdot$ verzichten.)

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ der Gleichung $(x, y) \boxdot (x, y) = (2, 0)$.

A 15 (3 Punkte)
Lösen Sie die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus:

$$(1) \quad \begin{aligned} 2x + z &= 4 \\ 6x + 2y + z &= 6 \\ x + 4y + 2z &= 12 \end{aligned} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}); \qquad (2) \quad \begin{aligned} 2x + z &= 2 \\ 6x + 2y + z &= 6 \\ 4y + 2z &= 8 \end{aligned} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Wäre es sinnvoll, Gleichungssysteme lediglich in Ringen, die keine Körper sind, zu betrachten? Argumentieren Sie mit den oben gewonnen Erkenntnissen.

A 16 (2 Punkte)
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem im Körper $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ mit den Verknüpfungen aus **A 3** für $q = 3$.

$$x + 2z = 1, \quad x + 2y = 1, \quad 2(y + 2z) = x \qquad (x, y, z \in \mathbb{Z}_3).$$

A 17 (5 Bonuspunkte)
Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad\; \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n, \end{matrix} \qquad (x_i \in \mathbb{R} \;\; \forall i = 1, ..., n)$$

für $n = 6$, $a_{j,k} = \dfrac{j \cdot s(s+1)}{2}$ wobei $s = \min\{j, k\}$ und $b_1 = 3$, $b_2 = 14$, $b_3 = 39$, $b_4 = 68$, $b_5 = 110$, $b_6 = 132$.