J. Wengenroth
T. Schlierkamp

WS 17/18
13.11.2017

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 4

Abgabe: Dienstag, 21.11.2017 bis 10:15 Uhr, Übungskasten 19
Besprechung in den Übungen:
Di. 21.11.2017, 10:15-11:45 Uhr oder 14:15-15:45 Uhr in E52.

Aufgabe 13
Seien $M = \{0, 1, ..., m-1\}$ und $N = \{0, 1, ..., n-1\}$. Zeigen Sie:

(a) $A_{m,n} = \{f \in M^N : f(0) < f(1) < ... < f(n-1)\}$ hat $\binom{m}{n}$ Elemente;

(b) $B_{m,n} = \{g \in M^N : g(0) \leq g(1) \leq ... \leq g(n-1)\}$ hat $\binom{m+n-1}{n}$ Elemente.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $F : B_{m,n} \to A_{m+n-1,n}$, definiert durch $F(g)(j) = g(j) + j$.

Aufgabe 14
(a) Zeigen Sie für $m \in \mathbb{N}_0$, dass $\sum\limits_{n=0}^{m} \binom{m}{n} = 2^m$ gilt, einerseits durch Induktion und andererseits mithilfe $|\mathscr{P}_n(M)| = \binom{m}{n}$, sofern $|M| = m$.

(b) Zeigen Sie für alle $0 \leq r \leq m$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{m}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{m-r}{n-k}.$$

Aufgabe 15
(a) Zeigen Sie für jede abzählbare Menge M, dass

$$\mathcal{E}(M) = \{A \in \mathscr{P}(M) : A \text{ endlich}\}$$

ebenfalls abzählbar ist.

(b) Es seien $W = \{f \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0} : f(n+1) \geq f(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$ und $F = \{f \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0} : f(n+1) \leq f(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$.
Sind W beziehungsweise F abzählbar? Beweisen oder widerlegen Sie ihre Vermutung.
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass Funktionen $f \in F$ ab einer Stelle $s \in \mathbb{N}_0$ konstant sind, d.h. $f(n+1) = f(n)$ für alle $n \geq s$.

Aufgabe 16
(a) Für $p \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $G_p(\lambda) = \{p + (x, \lambda x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ die Gerade durch p mit Steigung λ. Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^2$ abzählbar und $N \subseteq \mathbb{R}$ überabzählbar. Zeigen Sie für $p \in \mathbb{R}^2 \setminus M$, dass es ein $\lambda \in N$ gibt mit $G_p(\lambda) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus M$.

(b) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ ist die Menge der Punkte in der Ebene mit mindestens einer irrationalen Komponente. Zeigen Sie für alle $p, q \in A$, dass es ein $r \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass das Dreieck $\Delta(p, q, r)$ mit den 3 Ecken p, q, r zwei Seiten hat, die ganz in A liegen.

Hinweis: Zwei Geraden mit unterschiedlicher Steigung schneiden sich in genau einem Punkt.