Prof. Dr. Wengenroth
Thorben Schlierkamp

WS 2016/17
10.11.16

Lineare Algebra
Übung 3

Abgabe bis Mo, 21.11.16, 8:30 Uhr in Übungskasten E19
oder zu Beginn der ersten Übung. Besprechung in den Übungen:
Mo, 21.11.2016, 8:30-10:00 Uhr in HS 9
Mi, 23.11.2016, 17:50-19:20 Uhr in HS 9

A 9 (4 Punkte)

(a) $(G, *)$ sei eine Gruppe, so dass jedes Element zu sich selbst invers ist.
Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(b) $(G, +)$ sei eine endliche abelsche Gruppe und S bezeichne die Summe aller Elemente von G, also $S = \sum_{a \in G} a$. Zeigen Sie $S + S = 0$.
Hinweis: Für solch ein G gilt $\sum_{a \in G} a = \sum_{a \in G} f(a)$ für jedes bijektive $f : G \to G$.

(c) Gilt in der Situation von (b) sogar $S = 0$?

A 10 (5 Punkte)

(a) Füllen Sie für die symmetrische Gruppe $S_3 = \{f_1, ..., f_6\}$ (also der Gruppe aller bijektiven Abbildungen auf $\{1, 2, 3\}$) versehen mit der Komposition als Verknüpfung die sogenannte Kompositionstafel aus:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						
f_6						

, wobei

n	1	2	3
$f_1(n)$	1	2	3
$f_2(n)$	2	1	3
$f_3(n)$	1	3	2
$f_4(n)$	3	2	1
$f_5(n)$	2	3	1
$f_6(n)$	3	1	2

.

(In der i. Zeile und j. Spalte müssen Sie $f_i \circ f_j$ berechnen, wobei $i, j \in \{1, ..., 6\}$).

(b) Bilden Sie für jedes $i \in \{1, ..., 6\}$ den *Orbit* $O_i = \{f_i,\ f_i \circ f_i,\ f_i \circ f_i \circ f_i, ...\}$.
Wie viele verschiedene Orbits erhalten Sie und welche Orbits bilden mit der Komposition als Verknüpfung eine abelsche Gruppe?

A 11 (5 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit neutralen Elementen 0 bzw. 1. Zeigen Sie für $x, y \in R$:

(a) $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$
(b) $(-1)^2 = 1$ (benutze (a))
(c) $-x = (-1)x = x(-1)$
(d) $(-x)^2 = x^2$
(e) $-(xy) = x(-y) = (-x)y)$

A 12 (6 Punkte)

Für einen kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$ sei $R^{(\mathbb{N}_0)} = \{f : \mathbb{N}_0 \to R : \text{nur endlich viele } f(n) \neq 0\}$ versehen mit der (punktweisen) Addition $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$ und der Faltung $(f * g)(n) = f(0)g(n) + f(1)g(n - 1) + ... + f(n)g(0)$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$, $f, g \in R^{(\mathbb{N}_0)}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(R^{(\mathbb{N}_0)}, +, *)$ ein kommutativer Ring ist.
(Bei der Assoziativität der Faltung reicht es, wenn Sie den Fall für $n = 2$ betrachten.)

(b) Für $x \in R$ sei $\delta_x : R^{(\mathbb{N}_0)} \to R$, $f \mapsto f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + ...$, wobei die Summe endlich ist, da nur endlich viele $f(n) \neq 0$ sind.
Zeigen Sie, dass δ_x ein Ringmorphismus ist, d.h.
$\delta_x(f + g) = \delta_x(f) + \delta_x(g)$ und $\delta_x(f * g) = \delta_x(f) \cdot \delta_x(g)$ für alle $f, g \in R^{(\mathbb{N}_0)}$ sowie, dass das Einselement von $R^{(\mathbb{N}_0)}$ auf das Einselement von R abgebildet wird.