J. Wengenroth WS 17/18
T. Schlierkamp 06.11.2017

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 3

Abgabe: Dienstag, 14.11.2017 bis 10:15 Uhr, Übungskasten 19
Besprechung in den Übungen:
Di. 14.11.2017, 10:15-11:45 Uhr oder 14:15-15:45 Uhr in E52.

Aufgabe 9
Es seien X eine Menge und $T \subseteq X$. Zeigen Sie, dass durch

$$f : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(T) \times \mathscr{P}(X \setminus T), \;\; A \mapsto (A \cap T, A \setminus T)$$

eine bijektive Abbildung auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ definiert ist.

Aufgabe 10
Zeigen Sie für eine Abbildung $f : X \to Y$ folgende Aussagen:

(a) f injektiv $\Leftrightarrow$ Für alle Abbildungen $g, h : W \to X$ mit $f \circ g = f \circ h$ gilt $g = h$.

(b) f surjektiv $\Leftrightarrow$ Für alle Abbildungen $g, h : Y \to Z$ mit $g \circ f = h \circ f$ gilt $g = h$.

Hinweise: Für $\Leftarrow$ in (a) kann man einelementige Mengen W betrachten und für $\Leftarrow$ in (b) kann man eine zweielementige Menge Z sowie eine konstante Funktion g betrachten.

Aufgabe 11
Für $A \subseteq X$ ist die *Indikatorfunktion* $I_A : X \to \{0, 1\}$ definiert durch $I_A(x) = 1$, falls $x \in A$ und $I_A(x) = 0$, falls $x \notin A$.

(a) Charakterisieren Sie, wann I_A injektiv (beziehungsweise surjektiv) ist. (Vergessen Sie nicht den Fall $A = \emptyset$)

(b) Zeigen Sie für $A, B \subseteq X$:
$A = B \Leftrightarrow I_A^{-1}(\{1\}) = I_B^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow I_A^{-1}(\{0\}) = I_B^{-1}(\{0\})$

(c) Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : X \to \{0, 1\}$ eine Indikatorfunktion ist, d.h. es existiert $A \subseteq X$ mit $f = I_A$.

Aufgabe 12
Zeigen Sie, dass eine Menge X *genau dann* nicht endlich ist, *wenn* $\mathbb{N}_0 \preceq X$ gilt.
Hinweis für $\Rightarrow$: Definieren Sie ein injektives $f : \mathbb{N}_0 \to X$, indem Sie $f(n+1)$ in Abhängigkeit von $f(0), ..., f(n)$ wählen.