Prof. Dr. Wengenroth
Thorben Schlierkamp

WS 2016/17
04.11.16

**Lineare Algebra**
**Übung 2**

Abgabe bis Mo, 14.11.16, 8:30 Uhr in Übungskasten E19 oder zu Beginn der ersten Übung. Besprechung in den Übungen:
Mo, 14.11.2016, 8:30-10:00 Uhr in HS 9
Mi, 16.11.2016, 18:00-19:30 Uhr in HS 9

---

**A 5** (8 Punkte)
Es sei $(X, *)$ ein Monoid mit neutralem Element $e \in X$. Für $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir rekursiv die $n-$te Potenz von $x$ durch $x^0 = e$ und $x^{n+1} = x * x^n$.
Zeigen Sie folgende Behauptungen für $x, y \in X$ und $n, m \in \mathbb{N}_0$:

(a) $x^n * x^m = x^{n+m}, \quad (x^m)^n = x^{mn}$ ;

(b) Wenn $x * y = y * x$ ist, gilt $x^n * y^n = (x * y)^n$ ;

(c) Falls $x$ invertierbar ist, so ist auch $x^n$ invertierbar.

(d) Für invertierbares $x$ sei $x^{-n} = (x^n)^{-1}$. Dann gelten die Aussagen in (a) auch für $n, m \in \mathbb{Z}$.

**Hinweis:** (a), (b) Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$, (d) Fallunterscheidung.

**A 6** (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jedes endliche kürzbare Monoid eine Gruppe ist.
**Hinweis:** Die Potenzen $x^n$ eines $x \in X$ können für $n \in \mathbb{N}$ nicht alle verschieden sein.

(b) Stimmt (a) ohne die Voraussetzung der Kürzbarkeit noch?

**A 7** (4 Punkte)
Betrachten Sie das Monoid $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ Abbildung}\}$ mit der Komposition als Verknüpfung. Geben Sie je ein Element an, dass verschiedene Linksinverse beziehungsweise Rechtsinverse besitzt .

**A 8** (4 Punkte)
Zeigen Sie:

(a) Wenn ein Element $x$ eines Monoids $(X, *)$ eine Linksinverse hat, die ihrerseits wieder linksinvertierbar ist, dann ist $x$ invertierbar.

(b) Zeigen Sie ein Monoid ist eine Gruppe, falls jedes Element links-invertierbar ist.