

Lineare Algebra Tutorium 1

Besprechung in den Übungen:

Mo, 31.10.2016, 8:30-10:00 Uhr in HS 9

Mi, 02.11.2016, 18:00-19:30 Uhr in HS 9

T 1 (Division mit Rest)

Zeigen Sie für alle $q \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$, dass es $k \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, \dots, q-1\}$ gibt mit $a = kq + r$ gilt. Zeigen Sie außerdem, dass diese Zahlen k und r eindeutig sind.

Hinweis: Für $a \geq 0$ sei $k \in \mathbb{N}_0$ größtmöglich mit $kq \leq a$; im Fall $a < 0$ ist $\tilde{a} = -a > 0$.

T 2

$a \in \mathbb{Z}$ heißt Vielfaches von $q \in \mathbb{Z}$, falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $a = kq$. Dann heißt q auch Teiler von a und man schreibt $q \mid a$. Zeigen Sie für $a, b, q \in \mathbb{Z}$:

(a) $q \mid a$ und $q \mid b \Rightarrow q \mid (a + b)$ und $q \mid (a - b)$;

(b) $q \mid a$ und $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \mid (ab)$.

T 3

Seien $a, q \in \mathbb{N}$, so dass es $b \in \mathbb{N}$ gibt mit $q \mid ab$ und $q \nmid b$ (d.h. q teilt b nicht). Zeigen Sie, dass es dann ein $b_0 \in \{1, \dots, q-1\}$ gibt mit $q \mid ab_0$ und $q \nmid b_0$.

Hinweis: Division mit Rest.

T 4

Eine Zahl $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ heißt Primzahl, falls für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $m \mid q$ stets $m \in \{1, q\}$ gilt. Es seien q eine Primzahl und $a, b \in \mathbb{N}$ mit $q \mid ab$. Zeigen Sie, dass dann $q \mid a$ oder $q \mid b$ gilt.

Hinweis: Falls $q \nmid b$ gilt, gibt es wegen **T2** ein $b_0 \in \{1, \dots, q-1\}$ mit $q \mid ab_0$. Schreiben Sie $q = nb_0 + s$ mit $s \in \{0, \dots, b_0-1\}$, $n \in \mathbb{Z}$ und folgern Sie $s = 0$ sowie $b_0 = 1$.

T 5

Es sei X eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $* : X \times X \rightarrow X$ ohne neutrales Element und es sei $e \notin X$.

Machen Sie $X_e = X \cup \{e\}$ zu einem Monoid.

Wie würde man das Objekt e in den Fällen $(\mathbb{N}, +)$ und (\mathbb{N}, \min) nennen?